This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

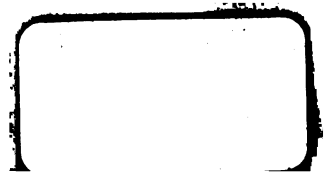
À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06907957 6

1. Mathematics — Early works to 1800

TD



I.C)

COURS
DE
MATHÉMATIQUE,

A L'USAGE

De Meſſieurs les CADETS GENTILSHOMMES *de Sa Majeſté le Roi de Pologne.*

TOME PREMIER.

ÉLÉMENS
DU CALCUL NUMÉRIQUE ET ALGÉBRIQUE.

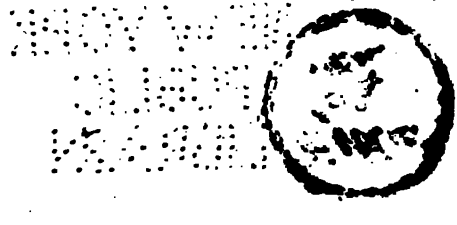
Par M. PLAID, *Chanoine Régulier, Profeſſeur royal de Mathématiques & d'Hiſtoire de l'Ecole Militaire & des Pages du Roi de Pologne, & Membre de l'Académie royale des Sciences & Belles-Lettres de Nancy.*

A PARIS,

Chez CH. ANT. JOMBERT, Libraire du Roi, pour l'Artillerie & le Génie, rue Dauphine à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LX.

TOR LIBRARY
NEW-YORK



AU ROI.

SIRE,

Lorſque VOTRE MAJESTE' *m'honora du ſoin d'inſtruire ſes Cadets Gentilshommes, je me déterminai aux plus grands efforts pour ſoutenir les progrès de cette brillante Ecole ; j'oſai même, dans le deſſein de les augmenter, entreprendre un ouvrage qui, par le choix & l'arrangement des matieres, par la ſimplicité & la clarté de la méthode, fût plus propre qu'aucun autre à former, ſelon les vues de* VOTRE MAJESTE', *des Officiers éclairés, & des citoyens utiles à la patrie.*

C'eſt cet ouvrage, SIRE, *que j'ai l'honneur de vous préſenter : je m'y efforce ſur-tout de rapprocher chaque vérité de ſon principe ; de réunir celles qui paroiſſent iſolées ; de montrer par-tout*

le fil qui les lie; celui qu'ont ſuivi les inventeurs. C'eſt le moyen de communiquer leur génie; je veux dire cet eſprit de reſſource que donne la recherche des vérités; cette ſagacité & cette pénétration par leſquelles le Géometre s'éleve aux découvertes les plus ſublimes.

Heureux! ſi mes talens ont ſecondé le deſir que j'ai d'être utile, & ſi l'exécution répond au projet: le ſuffrage, SIRE, de VOTRE MAJESTE', *ſi j'ai le bonheur de le mériter, aſſurera les Savans même de la réuſſite.*

Mais quel que ſoit le ſuccès de ce premier eſſai, j'eſpere que VOTRE MAJESTE' *daignera agréer mes efforts, & les regarder comme une preuve de mon zele pour le bien d'un établiſſement qui eſt autant l'ouvrage de ſa magnificence que celui de ſa bonté. L'une des merveilles de ſon regne, capable ſeule d'exciter l'admiration de l'Europe, & de mériter à ſon auguſte Fondateur le titre de Pere de la Patrie.*

Je ſuis avec un très-profond reſpect,

SIRE,

De VOTRE MAJESTE',

Le très-humble, très-obéiſſant & très-fidele ſujet, PLAID.

PRÉFACE.

« Il y a, ſur-tout en Mathématique, dit » l'Hiſtorien * de l'Académie Royale des » Sciences, plus de bons Livres qu'il n'y » en a de bien faits; c'eſt-à-dire, que l'on » en voit aſſez qui peuvent inſtruire, & peu » qui inſtruiſent avec une certaine méthode... » C'eſt bien aſſez d'avoir une bonne matiere » entre les mains, on ſe néglige ſur la for- » me. » Je n'ai rien négligé pour que cet ouvrage ſoit bon & bien fait; j'ai choiſi les matieres qui m'ont paru les plus utiles, & j'ai tâché de les traiter avec ordre & netteté.

Comme les Mathématiques ſont une Science de ſuppoſitions, c'eſt-à-dire qu'elles conſiſtent à imaginer la grandeur en différentes circonſtances, & à tirer des conſéquences de ces ſuppoſitions, on conçoit aiſément que la meilleure maniere d'enchaîner & d'arranger ces ſuppoſitions, eſt le meilleur ordre que l'on puiſſe introduire dans un Cours de Mathématiques.

Je me ſuis donc appliqué à donner un ſyſtême de ſuppoſitions le plus ſuivi & le moins arbitraire. Pour éviter la confuſion où peut jetter la multitude des combinaiſons mathé-

* M. De Fontenelle.

matiques qui ſont innombrables, j'ai coupé mon objet en grandes maſſes que j'ai continuellement ſous-diviſées; c'eſt-à-dire, que j'ai diſtingué des objets généraux auxquels j'ai vu que l'on pouvoit rapporter le plus d'objets particuliers. Diſpoſant ces objets principaux ſelon leur degré de compoſition; rangeant ſous chacun d'eux les ſuppoſitions qui leur ſont ſubordonnées; obſervant de ne faire qu'une même claſſe des ſuppoſitions de même eſpece; de les compoſer par une gradation ſoutenue, & d'éviter les rapports trop éloignés, j'ai vu naître un édifice régulier & ſymmétrique, dont l'eſprit parcourt toutes les parties ſans effort, les embraſſe d'un même coup-d'œil, & en voit avec plaiſir réſulter l'unité, parce que la chaîne en eſt continue.

Il ne me ſuffit pas de mettre entre les vérités mathématiques la liaiſon la plus immédiate, je m'efforce encore à la rendre ſenſible. Lorſque je traite chaque propoſition, j'en fais ſortir les conditions qu'elle renferme. Comme ces conditions ſont, pour ainſi dire, le fil qui lie la propoſition avec des vérités ou évidentes, ou déja démontrées, l'examen de ces conditions donne à l'inſtant le principe de la démonſtration, & répand ſur la propoſition la lumiere la plus vive & la plus ſatisfaiſante pour quiconque a du plaiſir à penſer.

Souvent j'affecte de chercher pour engager

ceux qui me liſent à chercher & à trouver avec moi : heureuſe illuſion qui nous procure & le plaiſir de la découverte, & l'art de l'invention.

Cette méthode que j'ai toujours ſuivie dans les leçons que j'ai l'honneur de faire dans l'Ecole Militaire de Sa Majeſté le Roi de Pologne, m'a toujours réuſſi. Je me garderai bien de la regarder comme la cauſe unique des ſuccès de cette brillante Ecole : tout ſemble d'ailleurs contribuer à y faire naître les plus grands progrès ; les heureuſes diſpoſitions d'une Nobleſſe la plus diſtinguée de deux Etats ; (*a*) le zele d'un Commandant (*b*) que ſa tendreſſe pour les Gentilshommes qu'il commande, rendroit ſeule digne de ſa place ; les ſoins vigilans d'Officiers éprouvés ; au-deſſus de tout cela, à quels efforts n'engage pas la préſence d'un Roi bienfaiteur, ſi capable de juger par lui-même ſi on répond à ſes bienfaits, & qui chaque mois ſe fait rendre un compte exact des progrès par un Commiſſaire (*c*) amateur du bon ordre, ſi digne, par l'accueil qu'il fait aux Maîtres qui ſe diſtinguent,

(*a*) Cette Ecole militaire eſt compoſée de quarante-huit Gentilshommes, vingt-quatre Lorrains, & vingt-quatre Polonois.

(*b*) Monſieur de Baye, Commandant de l'Ordre royal & militaire de Saint Louis, Maréchal des Camps & armées du Roi Très-Chrétien.

(*c*) M. Alliot, Conſeiller Aulique & Commiſſaire général de la Maiſon du Roi de Pologne.

& aux Eleves qui profitent, de faire auprès d'un Auguſte les fonctions d'un Mécene : il eſt ſans doute heureux de donner des leçons dans ces circonſtances ; mais ces circonſtances même, ſi capables d'évertuer le Maître comme les Eleves, ne ſemblent-elles pas former un préjugé en faveur de ſes leçons ? Puiſſent ces leçons répondre à l'augure, & mériter l'attention du public !

PLAN DU PREMIER VOLUME.

Ce volume, qui contient le Calcul élémentaire, algébrique & numérique, eſt diviſé en onze chapitres.

Dans le premier, je fais connoître l'objet du calcul; j'y expoſe la formation des nombres, leurs différentes eſpeces, & la numération; je donne enſuite les caracteres & les ſignes que l'on emploie dans l'Algebre, les différentes ſortes de grandeurs algébriques, & la maniere de les exprimer; ce qui me conduit naturellement à parler de la réduction des quantités littérales, puiſque cette réduction n'eſt qu'une expreſſion exacte des grandeurs.

Dans le ſecond Chapitre, j'enſeigne l'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion des nombres ſimples; je tâche de prévoir tous les cas pour étendre les méthodes; je montre la maniere d'abréger ces méthodes dans certaines ſuppoſitions; je m'applique ſur-tout à établir les principes qui lient ces premieres opérations ſur les nombres avec de plus compoſées.

Dans le troiſieme Chapitre, j'applique les opérations de l'arithmétique aux grandeurs littérales; c'eſt-à-dire, que j'enſeigne à ajouter, ſouſtraire, multiplier & diviſer ces grandeurs. Dans la diviſion algébrique je propoſe toujours de diviſer un produit par l'un de ſes produiſans; quant à la diviſion d'une grandeur par une quantité qui n'eſt pas l'un de ſes produiſans, je l'exprime comme une fraction qui a le dividende pour numérateur, & le diviſeur pour dénominateur, & je fais dans la ſuite ſur ces diviſions

indiquées les mêmes opérations que ſur les fractions numériques.

Les fractions tant numériques qu'algébriques, ſont l'objet du *quatrieme Chapitre*; j'y traite de leur réduction, & de la maniere de les ajouter, ſouſtraire, multiplier & diviſer.

Le cinquieme Chapitre eſt l'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion des nombres compoſés, dans leſquels je comprens les nombres compoſés d'entiers & de fractions.

Dans le ſixieme Chapitre, après avoir formé les quarrés & les cubes, j'extrais les racines quarrées & cubiques des quantités algébriques monomes & polimones.

Je donne enſuite des méthodes pour extraire les racines quarrées exactes des quarrés numériques, ou celles des plus grands quarrés contenus dans les nombres propoſés, lorſque ces nombres ne ſont pas des quarrés parfaits, ce qui eſt ſuivi de la maniere d'approcher ſi près que l'on voudra de la racine quarrée exacte.

Je donne de même les méthodes pour extraire les racines cubiques exactes des cubes numériques, ou celles des plus grands cubes contenus dans les nombres propoſés, lorſque ces nombres ne ſont pas des cubes parfaits; ce qui eſt encore ſuivi de l'approximation de la racine cubique exacte. Je termine ce chapitre par quelques propoſitions ſur les produits des grandeurs multipliées par elles-mêmes, ou les unes par les autres.

Le ſeptieme Chapitre renferme le calcul des puiſſances par les expoſans; le calcul des radicaux que je déduis du calcul des puiſſances par les expoſans; & l'élévation des grandeurs aux puiſſances quelcon-

ques, ſoit que l'expoſant de ces puiſſances ſoit un nombre entier ou une fraction; ce qui ſert à trouver par approximation la valeur des quantités compoſées de radicaux, & ce qui prépare au calcul de l'infini.

Le huitieme Chapitre a pour objet les équations. Après avoir donné les regles générales des équations, j'expoſe les regles propres aux équations du premier degré, ce qui me donne l'occaſion de parler des problêmes indéterminés, & de montrer ce qui les rend tels. Viennent après cela les regles propres aux équations du ſecond degré: je démontre les deux racines de ces ſortes d'équations, & je fais connoître le cas auquel ces deux racines ſont imaginaires; j'applique enſuite cette théorie à la ſolution de divers problêmes du premier & du ſecond degré.

Des équations du premier & du ſecond degré, je paſſe aux équations des degrés ſupérieurs, & les conſidérant en général, je fais d'abord voir que toute équation compoſée peut être regardée comme formée de la multiplication d'autant d'équations ſimples qu'il y a d'unités dans l'expoſant de ſon degré; & de cette formation je déduis les propriétés principales des équations compoſées en général; ce qui eſt ſuivi des propriétés des équations compoſées qui ont des racines imaginaires. Je donne enſuite la réduction & la transformation des équations compoſées, où j'enſeigne à délivrer de fractions une équation compoſée ſans donner de coefficient au premier terme; à délivrer, dans une équation compoſée, le premier terme de coefficient lorſqu'il en a un différent de l'unité; à changer une équation compoſée en une autre dont le dernier terme ait moins de diviſeurs que celui de la propoſée; à enlever le ſecond terme dans une équation compoſée; à changer une équation compoſée qui a des racines négatives en une autre dont tou-

tes les racines ſoient poſitives ; enfin à trouver les racines commenſurables d'une équation quelconque compoſée, lorſqu'elle en renferme.

Je traite enſuite des équations d'un degré quelconque, lorſqu'elles n'ont que deux termes, ou lorſqu'ayant trois termes elles ſont réductibles à celles qui n'en ont que deux par la méthode des équations du ſecond degré. En réſolvant ces ſortes d'équations, je m'applique à démontrer le nombre de leurs racines réelles.

Je termine ce chapitre par les équations du troiſieme degré : je donne d'abord la réſolution générale de ces équations. Je fais voir enſuite le cas auquel les racines de ces équations ſont toutes trois réelles, & le cas auquel il y a une racine réelle, & deux imaginaires ; & comment, au défaut de racines exactes, on peut en trouver par approximation.

Le neuvieme Chapitre eſt un traité des raiſons, proportions & progreſſions géométriques ; je démontre d'abord les propriétés des raiſons géométriques ſimples & compoſées, & celles des proportions. J'applique enſuite quelques-unes des propriétés des proportions à la démonſtration des regles de trois directes & inverſes, ſimples & compoſées, & de la regle de ſociété.

Viennent enfin les propriétés des progreſſions géométriques, deſquelles je déduis la maniere de déterminer quel terme l'on voudra d'une progreſſion géométrique, & les méthodes pour ſommer les progreſſions géométriques quelconques.

Dans le dixieme Chapitre je démontre les propriétés des proportions & progreſſions arithmétiques, & je fais ſervir ces propriétés à la ſolution de divers problèmes ſur les proportions & progreſſions arithmétiques.

Je traite enſuite des logarithmes, & je me borne à en expoſer les propriétés, & à montrer l'uſage dont ils ſont dans l'arithmétique.

Dans l'onzieme Chapitre j'applique l'algebre à la réſolution de quelques problêmes d'arithmétique.

Je réſous d'abord divers problêmes ſur les progreſſions géométriques & arithmétiques; & comme l'extraction des racines des quantités en partie commenſurables & en partie incommenſurables eſt abſolument néceſſaire pour la réſolution complette des équations à trois termes, réductibles à deux par la méthode des équations du ſecond degré, je mets en problême l'extraction des racines de ces ſortes de quantités.

Je m'applique enſuite à déterminer la maniere de ſommer les puiſſances d'un même degré quelconque des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque croiſſante & finie.

La ſolution d'un problême auſſi général me fournit une formule de laquelle je déduis des formules particulieres pour ſommer les puiſſances des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque, dont la différence ſera donnée.

A l'aide de ces formules je parviens aiſément à déterminer la valeur d'un nombre poligone quelconque, dont le côté & le nombre des angles ſont donnés; ce qui me conduit à trouver la valeur indéterminée de la ſomme d'une ſuite de nombres poligones d'une même eſpece quelconque, étant donné avec le nombre des angles le côté du plus grand nombre poligone de cette ſuite, d'où je tire les regles pour compter les boulets des pyramides triangulaires & quarrées, & la maniere de former les nombres pyramidaux du ſecond ordre, ou de quel ordre l'on voudra.

tes les racines ſoient poſitives ; enfin à trouver les racines commenſurables d'une équation quelconque compoſée, lorſqu'elle en renferme.

Je traite enſuite des équations d'un degré quelconque, lorſqu'elles n'ont que deux termes, ou lorſqu'ayant trois termes elles ſont réductibles à celles qui n'en ont que deux par la méthode des équations du ſecond degré. En réſolvant ces ſortes d'équations, je m'applique à démontrer le nombre de leurs racines réelles.

Je termine ce chapitre par les équations du troiſieme degré : je donne d'abord la réſolution générale de ces équations. Je fais voir enſuite le cas auquel les racines de ces équations ſont toutes trois réelles, & le cas auquel il y a une racine réelle, & deux imaginaires ; & comment, au défaut de racines exactes, on peut en trouver par approximation.

Le neuvieme Chapitre eſt un traité des raiſons, proportions & progreſſions géométriques ; je démontre d'abord les propriétés des raiſons géométriques ſimples & compoſées, & celles des proportions. J'applique enſuite quelques-unes des propriétés des proportions à la démonſtration des regles de trois directes & inverſes, ſimples & compoſées, & de la regle de ſociété.

Viennent enfin les propriétés des progreſſions géométriques, deſquelles je déduis la maniere de déterminer quel terme l'on voudra d'une progreſſion géométrique, & les méthodes pour ſommer les progreſſions géométriques quelconques.

Dans le dixieme Chapitre je démontre les propriétés des proportions & progreſſions arithmétiques, & je fais ſervir ces propriétés à la ſolution de divers problèmes ſur les proportions & progreſſions arithmétiques.

Je traite enſuite des logarithmes, & je me borne à en expoſer les propriétés, & à montrer l'uſage dont ils ſont dans l'arithmétique.

Dans l'onzieme Chapitre j'applique l'algebre à la réſolution de quelques problêmes d'arithmétique.

Je réſous d'abord divers problêmes ſur les progreſſions géométriques & arithmétiques; & comme l'extraction des racines des quantités en partie commenſurables & en partie incommenſurables eſt abſolument néceſſaire pour la réſolution complette des équations à trois termes, réductibles à deux par la méthode des équations du ſecond degré, je mets en problême l'extraction des racines de ces ſortes de quantités.

Je m'applique enſuite à déterminer la maniere de ſommer les puiſſances d'un même degré quelconque des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque croiſſante & finie.

La ſolution d'un problême auſſi général me fournit une formule de laquelle je déduis des formules particulieres pour ſommer les puiſſances des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque, dont la différence ſera donnée.

A l'aide de ces formules je parvins aiſément à déterminer la valeur d'un nombre poligone quelconque, dont le côté & le nombre des angles ſont donnés; ce qui me conduit à trouver la valeur indéterminée de la ſomme d'une ſuite de nombres poligones d'une même eſpéce quelconque, étant donné avec le nombre des angles le côté du plus grand nombre poligone de cette ſuite, d'où je tire les regles pour compter les boulets des pyramides triangulaires & quarrées, & la maniere de former les nombres pyramidaux du ſecond ordre, ou de quel ordre l'on voudra.

tes les racines ſoient poſitives ; enfin à trouver les racines commenſurables d'une équation quelconque compoſée, lorſqu'elle en renferme.

Je traite enſuite des équations d'un degré quelconque, lorſqu'elles n'ont que deux termes, ou lorſqu'ayant trois termes elles ſont réductibles à celles qui n'en ont que deux par la méthode des équations du ſecond degré. En réſolvant ces ſortes d'équations, je m'applique à démontrer le nombre de leurs racines réelles.

Je termine ce chapitre par les équations du troiſieme degré : je donne d'abord la réſolution générale de ces équations. Je fais voir enſuite le cas auquel les racines de ces équations ſont toutes trois réelles, & le cas auquel il y a une racine réelle, & deux imaginaires ; & comment, au défaut de racines exactes, on peut en trouver par approximation.

Le neuvieme Chapitre eſt un traité des raiſons, proportions & progreſſions géométriques ; je démontre d'abord les propriétés des raiſons géométriques ſimples & compoſées, & celles des proportions. J'applique enſuite quelques-unes des propriétés des proportions à la démonſtration des regles de trois directes & inverſes, ſimples & compoſées, & de la regle de ſociété.

Viennent enfin les propriétés des progreſſions géométriques, deſquelles je déduis la maniere de déterminer quel terme l'on voudra d'une progreſſion géométrique, & les méthodes pour ſommer les progreſſions géométriques quelconques.

Dans le dixieme Chapitre je démontre les propriétés des proportions & progreſſions arithmétiques, & je fais ſervir ces propriétés à la ſolution de divers problêmes ſur les proportions & progreſſions arithmétiques.

Je traite enſuite des logarithmes, & je me borne à en expoſer les propriétés, & à montrer l'uſage dont ils ſont dans l'arithmétique.

Dans l'onzieme Chapitre j'applique l'algebre à la réſolution de quelques problêmes d'arithmétique.

Je réſous d'abord divers problêmes ſur les progreſſions géométriques & arithmétiques; & comme l'extraction des racines des quantités en partie commenſurables & en partie incommenſurables eſt abſolument néceſſaire pour la réſolution complette des équations à trois termes, réductibles à deux par la méthode des équations du ſecond degré, je mets en problême l'extraction des racines de ces ſortes de quantités.

Je m'applique enſuite à déterminer la maniere de ſommer les puiſſances d'un même degré quelconque des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque croiſſante & finie.

La ſolution d'un problême auſſi général me fournit une formule de laquelle je déduis des formules particulieres pour ſommer les puiſſances des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque, dont la différence ſera donnée.

A l'aide de ces formules je parviens aiſément à déterminer la valeur d'un nombre poligone quelconque, dont le côté & le nombre des angles ſont donnés; ce qui me conduit à trouver la valeur indéterminée de la ſomme d'une ſuite de nombres poligones d'une même eſpece quelconque, étant donné avec le nombre des angles le côté du plus grand nombre poligone de cette ſuite, d'où je tire les regles pour compter les boulets des pyramides triangulaires & quarrées, & la maniere de former les nombres pyramidaux du ſecond ordre, ou de quel ordre l'on voudra.

Enfin reprenant la formule touchant la ſomme des puiſſances d'un même degré quelconque des termes de la progreſſion finie des nombres naturels, & réduiſant cette formule ſelon les propriétés de la grandeur conſidérée comme infinie, j'en déduis la formule touchant la ſomme des puiſſances d'un même degré quelconque des termes de la progreſſion des nombres naturels qui commence par l'unité, & qui eſt pouſſée à l'infini.

D'où je tire des formules particulieres pour ſommer les puiſſances d'un expoſant déterminé entier ou fractionnaire des termes de la même progreſſion.

TABLE

Des Chapitres, Sections & Articles contenus dans ce volume.

CHAPITRE PREMIER.

De l'objet du calcul, des nombres & des grandeurs algébriques, considérées dans leurs différentes especes, & dans leurs expressions, page 1

SECTION PREMIERE.

Objet du calcul, ibid.
ARTICLE PREMIER. *Définitions,* ibid.
ARTICLE II. *Des quatre regles fondamentales de l'Arithmétique,* 2
ARTICLE III. *De l'Arithmétique & de l'Algebre,* 3

SECTION II.

Des nombres, de leur formation, de leurs différentes especes, & de la numération, ibid.
ARTICLE PREMIER. *De la formation des nombres,* ibid.
ART. II. *Du nombre absolu & du nombre concret,* 4
ART. III. *De la Numération,* 6
ART. IV. *Maniere d'énoncer un nombre exprimé par une suite de chiffres,* 9
ART. V. *Maniere d'exprimer par des chiffres un nombre quelconque,* 11

SECTION III.

Des caracteres & des signes que l'on emploie dans l'Al-

gebre, des différentes ſortes de grandeurs algébriques, avec la maniere de les écrire & de les réduire, 11
ARTICLE PREMIER. *Des caracteres & des ſignes algébriques,* ibid.
ART. II. *Des différentes ſortes de grandeurs algébriques,* 15
ART. III. *Maniere d'exprimer les quantités algébriques,* 16
ART. IV. *De l'expoſant d'une lettre,* 17
ART. V. *Du coefficient d'un terme,* 18
ART. VI. *De la réduction des grandeurs algébriques à leurs plus ſimples expreſſions,* 19

CHAPITRE II.

Des opérations de l'Arithmétique ſur les nombres, 21
ARTICLE PREMIER. *De l'addition des nombres ſimples,* ibid.
ART. II. *De la ſouſtraction des nombres ſimples,* 25
ART. III. *De la preuve de l'addition & de la ſouſtraction,* 29
ART. IV. *De la multiplication des nombres ſimples,* 31
ART. V. *De la diviſion des nombres ſimples,* 47
ART. VI. *De la preuve de la multiplication & de la diviſion ſimples,* 72

CHAPITRE III.

De l'Addition, de la Souſtraction, de la Multiplication & de la Diviſion algébrique, 74
ARTICLE PREMIER. *De l'Addition,* ibid.
ART. II. *De la Souſtraction,* 75
ART. III. *De la Multiplication,* 78
ART. IV. *De la Diviſion,* 88

CHAPITRE IV.

Des opérations ſur les fractions, 102

DES CHAPITRES, &c. xvij
ARTICLE PREMIER. *Définitions*, 102
ART. II. *Problêmes sur les fractions*, 107

CHAPITRE V.

Des opérations de l'Arithmétique sur les nombres composés, 123
ARTICLE PREMIER. *De l'addition des nombres composés*, 124
ART. II. *De la soustraction des nombres composés*, 128
ART. III. *De la multiplication des nombres composés*, 132
ART. IV. *De la division composée*, 145.

CHAPITRE VI.

De la formation des quarrés & des cubes, de l'extraction de leurs racines, & des produits des grandeurs multipliées les unes par les autres, & par elles-mêmes, 152

SECTION PREMIERE.

De la définition & formation des quarrés & des cubes, ibid.
ARTICLE PREMIER. *Définitions*, ibid.
ART. II. *De la formation des quarrés & des cubes*, 154

SECTION II.

De l'extraction des racines quarrées, 156
ARTICLE PREMIER. *Méthode pour extraire la racine quarrée d'un quarré algébrique incomplexe*, 157
ART. II. *Méthode pour extraire la racine quarrée d'un quarré algébrique polinome*, 158
ART. III. *Méthode pour extraire la racine quarrée d'un nombre représenté par plus de deux chiffres, ou du plus grand quarré contenu dans ce nombre*, 164
ART. IV. *Méthode pour extraire la racine quarrée d'une fraction*, 177

ART. V. *Méthode pour s'assurer si la racine quarrée trouvée est assez grande,* 178
ART. VI. *Méthode pour approcher si près que l'on voudra de la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas un quarré parfait,* 180

SECTION III.

De l'extraction des racines cubiques, 183
ARTICLE PREMIER. *Maniere d'extraire la racine cubique d'un cube algébrique incomplexe,* 184
ART. II. *Maniere d'extraire la racine cubique d'un cube algébrique polinome,* 185
ART. III. *Méthode pour extraire la racine cubique d'un nombre représenté par plus de trois chiffres, ou celle du plus grand cube contenu dans ce nombre,* 192
ART. IV. *Problême pour extraire la racine cubique d'une fraction,* 206
ART. V. *Problême pour s'assurer si la racine trouvée est assez grande,* 207
ART. VI. *Méthode pour approcher si près que l'on voudra de la racine cubique d'un nombre qui n'est pas un cube parfait,* 210

SECTION IV.

Des produits des grandeurs multipliées par elles-mêmes, & les unes par les autres, 212

CHAPITRE VII.

Du calcul des puissances par les exposans, du calcul des grandeurs radicales, & de l'élévation des grandeurs aux puissances quelconques, 216

SECTION PREMIERE.

Du calcul des puissances par les exposans, ibid.

ARTICLE PREMIER. *Propoſitions ſur le calcul des puiſſances par les expoſans*, 217
ART. II. *Problêmes ſur le calcul des puiſſances par les expoſans*, 223

SECTION II.

Du calcul des radicaux, 230
ARTICLE PREMIER. *De la préparation aux opérations ſur les grandeurs radicales*, 232
ART. II. *Problêmes ſur la réduction des grandeurs radicales, & ſur leur addition, leur multiplication, leur diviſion, &c.* 235

SECTION III.

De l'élévation des grandeurs aux puiſſances quelconques, 252
ARTICLE PREMIER. *Contenant diverſes formules touchant la valeur de* $\overline{p \pm q}^{m}$, ibid.
ART. II. *Méthodes pour élever un binome ou un polinome à une puiſſance quelconque dont l'expoſant ſoit un nombre entier ou une fraction*, 258

CHAPITRE VIII.

Des Equations, 269
Définitions, ibid.

SECTION PREMIERE.

Des regles pour les équations en général, 272
ARTICLE PREMIER. *Des regles générales des équations, & des regles particulieres pour les équations du premier & du ſecond degré*, ibid.
ART. II. *De la réſolution des problêmes du premier & du ſecond degré*, 300

SECTION II.

Des Equations des degrés ſupérieurs, 335

Définitions, ibid.
ARTICLE PREMIER. *De la formation des équations compoſées, & des propriétés déduites de leur formation*, 338
ART. II. *De la réduction & de la transformation des équations*, 346
ART. III. *De la réſolution des équations compoſées, lorſqu'elles ont des racines commenſurables*, 360
ART. IV. *De la réſolution des équations d'un degré quelconque, lorſqu'elles n'ont que deux termes; ou lorſqu'ayant trois termes, elles ſont réductibles à celles qui n'en ont que deux, par la méthode des équations du ſecond degré*, 364
ART. V. *De la réſolution des équations du troiſieme degré*, 368

CHAPITRE IX.

Des propriétés des raiſons, proportions & progreſſions géométriques, 374

SECTION PREMIERE.

Des propriétés des raiſons & proportions géométriques, ibid.
ARTICLE PREMIER. *Définitions & principes*, ibid.
ART. II. *Des propriétés des raiſons géométriques ſimples & compoſées*, 380
ART. III. *Des propriétés des proportions géométriques*, 386
ART. IV. *Divers problêmes ſur les proportions*, 395

SECTION II.

Des propriétés des progreſſions géométriques, 410
Définitions, ibid.
ARTICLE PREMIER. *Examen des propriétés des progreſſions géométriques*, 411

ART. II. *Problêmes ſur les progreſſions géométriques*, 417

CHAPITRE X.

Des proportions & progreſſions arithmétiques, & des logarithmes, 422

SECTION PREMIERE.

Des proportions arithmétiques, ibid.
Définitions, ibid.
ARTICLE PREMIER. *Dans toute proportion arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens*, 424
ART. II. *Trois termes d'une proportion arithmétique étant donnés, trouver le quatrieme*, 426

SECTION II.

Des progreſſions arithmétiques, 427
Définitions, ibid.
ARTICLE PREMIER. *Des propriétés des progreſſions arithmétiques croiſſantes & décroiſſantes*, 428
ART. II. *Problêmes ſur les progreſſions arithmétiques*, 432

SECTION III.

Des Logarithmes, 437
ARTICLE PREMIER. *Définitions des Logarithmes*, ibid.
ART. II. *Des propriétés des Logarithmes*, 438
ART. III. *De l'uſage des Logarithmes dans l'arithmétique*, 440

CHAPITRE XI.

Application de l'Algebre à la réſolution de quelques problêmes d'arithmétique, 443

SECTION PREMIERE.

Des problêmes ſur les progreſſions géométriques & arithmétiques, & de l'extraction des racines quarrées & cubiques des quantités compoſées de grandeurs radicales du ſecond degré, & de non radicales, ibid.

ARTICLE PREMIER. *Des problêmes ſur les progreſſions géométriques,* ibid.

ART. II. *Des problêmes ſur les progreſſions arithmétiques,* 448

ART. III. *De la recherche des racines quarrées & cubiques des quantités compoſées de grandeurs radicales du ſecond degré, & de non radicales,* 454

SECTION II.

De la maniere de ſommer les puiſſances d'un même degré quelconque des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque croiſſante & finie, 466

ARTICLE PREMIER. *De la maniere de ſommer les puiſſances d'un même degré quelconque des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque croiſſante & finie,* ibid.

ART. II. *Des nombres poligones & pyramidaux. Maniere de compter les boulets des pyramides,* 479

ART. III. *De la grandeur conſidérée comme infinie,* 489

Fin de la Table des Chapitres, Sections & Articles du premier volume.

APPROBATION.

J'AI examiné, par ordre de Monſeigneur le Chancelier, les deux premiers volumes d'un manuſcrit intitulé : *Cours de Mathématique, à l'uſage de Meſſieurs les Cadets Gentilshommes de Sa Majeſté le Roi de Pologne, &c.* L'ordre & la clarté qui regnent dans cet Ouvrage, me le font juger très-digne d'être rendu public. A Paris, ce premier mars 1757.

DEPARCIEUX.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT ; Notre amé le ſieur PLAID, Chanoine Régulier, Nous a fait expoſer qu'il déſireroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage qui a pour titre : *Cours de Mathématiques à l'uſage de Meſſieurs les Cadets Gentilshommes de Sa Majeſté le Roi de Pologne.* S'il nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce néceſſaires. A ces Cauſes, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer ledit Ouvrage, autant de fois que bon lui ſemblera, & de le faire vendre & débiter par tout notre royaume, pendant le tems de douze années conſécutives, à compter du jour de la date des préſentes. Faiſons défenſes à tous Imprimeurs, Libraires & autres perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucuns lieux de notre obéiſſance, comme auſſi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucuns extraits, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Ex-

poſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles, que l'impreſſion dudit Ouvrage ſera faite dans notre royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée & attachée pour modele ſous le contre-ſcel des préſentes; que l'Impétrant ſe conformera en tout aux réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; qu'avant de l'expoſer en vente, le manuſcrit qui aura ſervi de copie à l'Impreſſion dudit Ouvrage, ſera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France, le ſieur de Lamoignon, & qu'il en ſera enſuite remis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France le ſieur de Lamoignon, le tout à peine de nullité des Préſentes. Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant ou ſes ayans cauſes, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucuns troubles ou empêchemens. Voulons que la copie des Préſentes, qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, ſoit tenue pour duement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par un de nos amés & féaux Conſeillers, Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent, ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Chartre Normande, & Lettres à ce contraires: Car tel eſt notre plaiſir. Donné à Verſailles le deuxieme jour du mois d'avril, l'an de grace mil ſept cent cinquante-ſept, & de notre regne le quarante-deuxieme. Par le Roi en ſon Conſeil.

LE BEGUE.

Regiſtré ſur le Regiſtre XV. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, n°. 2207, fol. 83, conformément au Réglement de 1723, qui fait défenſes, article 41, à toutes perſonnes de quelques qualités & conditions qu'elles ſoient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter, faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, ſoit qu'ils s'en diſent les Auteurs ou autrement, & à la charge de fournir à la ſuſdite Chambre neuf Exemplaires preſcrits par l'article 108 du même Réglement. A Paris, ce 18 juillet 1760. G. SAUGRAIN, Syndic.

CALCUL

CALCUL ÉLÉMENTAIRE.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Objet du Calcul, des Nombres & des Grandeurs algébriques, conſidérés dans leurs différentes eſpeces, & dans leur expreſſion.

SECTION PREMIERE.

Objet du Calcul.

DÉFINITIONS.

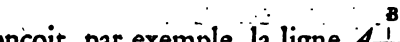
ARTICLE I.

1. LA *grandeur en général*, c'eſt tout ce qui peut être augmenté ou diminué.

Si l'on conçoit la grandeur partagée en pluſieurs parties égales, l'une de ces parties ſe nomme *unité*, & l'aſſemblage de pluſieurs de ces parties eſt appellé *nombre* ou *grandeur numérique*.

Ainſi l'unité eſt une de ces parties égales, dont on imagine qu'une grandeur eſt compoſée, & le nom-

bre ou la grandeur numérique eſt un aſſemblage d'unités.



Si on conçoit, par exemple, la ligne A——G coupée en ſix parties égales AB, BC, CD, DE, EF, FG, chacune de ces parties ſera une unité de cette ligne; & cette ligne, conſidérée comme l'amas de ces ſix parties, ſera un nombre.

De même un aſſemblage de vingt ou trente perſonnes eſt un nombre, dont chaque unité eſt une perſonne.

2. Si l'on conſidere une quantité quelconque ſous l'idée générale de grandeur, ſans faire attention, ni à ſon eſpece, ni au nombre des unités dont elle peut être compoſée; cette quantité, ainſi conſidérée, ſe nomme *grandeur algébrique*. . . . Les grandeurs algébriques ſont donc des quantités quelconques, exprimées par des caracteres généraux, qui n'en déſignent ni l'eſpece, ni le nombre des unités.

ARTICLE II.

3. *Ajouter*, c'eſt faire un tout de deux ou de pluſieurs grandeurs de même eſpece: ce tout, qui eſt le réſultat de l'addition, ſe nomme *ſomme*.

Souſtraire, c'eſt retrancher une grandeur d'une autre de même eſpece: le réſultat de la ſouſtraction ſe nomme *excès* ou *différence*.

Multiplier une grandeur par une autre, c'eſt répéter l'une autant de fois qu'il eſt déſigné par l'autre. Les deux grandeurs que l'on multiplie, ſe nomment en général *produiſans*; & l'on nomme en particulier *multiplicande*, la grandeur que l'on multiplie, & *multiplicateur*, celle par laquelle on multiplie. Le réſultat de la multiplication, ou la quantité qui vient en répétant le multiplicande autant de fois qu'il eſt déſigné par le multiplicateur, ſe nomme *produit*.

Diviſer une grandeur par une autre, c'eſt retrancher la ſeconde de la premiere autant de fois qu'il eſt poſſible, afin de ſçavoir combien de fois elle y eſt contenue. La grandeur que l'on diviſe ſe nomme *dividende*, celle par laquelle on diviſe ſe nomme *diviſeur*; & la grandeur réſultante de la diviſion, c'eſt-à-dire, qui marque combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende, ſe nomme *quotient*.

ARTICLE III.

4. *Calculer*, c'eſt ajouter, ſouſtraire, multiplier & diviſer les grandeurs.

On nomme *Arithmétique* la ſcience qui enſeigne à ajouter, ſouſtraire, multiplier & diviſer les nombres, & à faire uſage de ces opérations pour découvrir les propriétés des nombres conſidérés dans différentes ſuppoſitions.

On nomme *Algebre* la ſcience qui enſeigne à ajouter, ſouſtraire, multiplier & diviſer les grandeurs algébriques, & à faire uſage de ces opérations pour déterminer les propriétés de ces grandeurs dans les différentes circonſtances dans leſquelles on peut les imaginer.

SECTION II.

Les Nombres, leur formation, leur différente eſpece & la numération.

ARTICLE I.

5. UN nombre étant un aſſemblage d'untités, il eſt évident que, ſi à une unité on ajoute une autre unité, on formera un nombre que l'on nomme *deux*. En ajoutant au nombre deux une nouvelle unité, on aura le nombre *trois*. Enfin, en ajoutant continuellement l'unité aux nombres déja formés, on aura les nombres

ſuivans, *quatre*, *cinq*, *ſix*, &c. Comme l'on pourra répéter à l'infini les additions de l'unité aux nombres que l'on aura formés, quelque conſidérables qu'ils ſoient, il eſt viſible que la ſuite des nombres eſt infinie.

ARTICLE II.

On diſtingue différentes ſortes de nombres, eu égard aux unités dont ils ſont compoſés.

6. Le nombre *abſolu* eſt celui dont les unités ſont vagues, c'eſt-à-dire, dont l'eſpece n'eſt pas déſignée. Tels ſont les nombres dix, vingt, trente, &c. & les nombres deux fois, trois fois, &c.

7. On nomme nombre *concret* celui dont on déſigne l'eſpece des unités. Tels ſont les nombres deux louis, vingt hommes, ſix toiſes, &c. On conçoit aiſément que les nombres concrets ſont les ſeuls qui exiſtent réellement; car chaque choſe étant d'une eſpece déterminée, ſes unités étant de même nature qu'elle, ſont auſſi d'une eſpece déterminée. Ainſi les nombres vagues ou les unités abſolues ne ſont que des idées de l'arithméticien qui, pour rendre les opérations applicables aux nombres de toutes les eſpeces, conſidere les nombres d'une façon vague, c'eſt-à-dire, préciſément comme des aſſemblages d'unités, ſans s'embarraſſer de l'eſpece de ces unités.

8. On nomme nombre *entier* celui qui contient l'unité pluſieurs fois exactement, & l'on appelle nombre *rompu* ou *fraction* une ou pluſieurs des parties égales, dans leſquelles on conçoit que l'unité eſt diviſée.

Si on prend, par exemple, un écu pour unité, les nombres concrets vingt écus, trente écus, &c. ſont des nombres entiers; & ſi l'on imagine l'écu diviſé en un nombre quelconque de parties égales, une ou plu-

ſieurs de ces parties d'écu forment une fraction.... L'idée d'une fraction eſt donc une idée compoſée de deux nombres : l'une eſt le nombre des parties égales, dans leſquelles l'unité eſt diviſée ; l'autre eſt le nombre de ces parties que l'on prend.

L'unité que l'on conçoit diviſée, eſt dite unité *principale*. Les parties égales dans leſquelles l'unité a été diviſée, ſont appellées *fractionnaires*, & le nombre qui les exprime ſe nomme *dénominateur*, parce que les unités fractionnaires ont leur dénomination dérivée du nombre des parties de l'unité : elles ſe nomment, par exemple, *tiers*, *quarts*, *cinquiemes*, &c. ſelon que l'unité eſt diviſée en trois, quatre, cinq, &c. parties égales. Le nombre qui exprime combien l'on prend de ces parties égales de l'unité, s'appelle *numérateur*.

On énonce une fraction en prononçant d'abord le numérateur, & enſuite le dénominateur. Si, par exemple, on partage l'écu en douze parties égales, & que l'on prenne une ou deux, ou trois de ces parties, on énonce ces fractions en diſant, un douzieme d'écu, deux douziemes, trois douziemes d'écu, & ainſi des autres.

La fraction d'une unité abſolue eſt dite *fraction abſolue*. Telles ſont les fractions un quart de fois, trois cinquiemes, &c.

La fraction d'une unité concrete eſt dite *fraction concrete*. Telles ſont les fractions deux quarts de pied, trois cinquiemes d'écu, huit quinziemes de toiſe, &c.

9. Le nombre *ſimple* eſt celui qui ne comprend que des unités d'une même valeur. Tel eſt, par exemple, le nombre vingt toiſes ou le nombre cent louis, &c.

J'appellerai nombre *compoſé* celui qui comprend

des unités de différentes valeurs, mais qui ont rapport à la même eſpece. Tels ſont, par exemple, le nombre cent livres huit ſols ſix deniers, & le nombre trente toiſes un quart & deu xſeptiemes de toiſes.

ARTICLE III.

10. Quoiqu'il y ait une infinité de nombres différens, on eſt parvenu à les exprimer avec dix caracteres ſeulement, placés & répétés différemment.

Ces dix caracteres, que l'on nomme *chiffres*, ſont, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

11. L'art d'exprimer tous les nombres poſſibles avec ce petit nombre de caracteres, ſe nomme *numération*. Voici les conventions ſur leſquelles cet art eſt fondé.

1°. L'on eſt convenu que

les caracteres exprimeroient

0	*zero* ou *rien.*
1	*un.*
2	*deux.*
3	*trois.*
4	*quatre.*
5	*cinq.*
6	*ſix.*
7	*ſept.*
8	*huit.*
9	*neuf.*

Enſorte qu'avec ces dix caracteres on peut compter depuis rien juſqu'à neuf incluſivement.

2°. On eſt convenu que lorſque pluſieurs chiffres ſeront rangés de ſuite ſur une même ligne, ils prendroient différentes valeurs relativement à leurs rangs. On compte ces rangs de droite à gauche, & chaque

chiffre exprime des dizaines à l'égard de celui qui le ſuit immédiatement vers la droite. Enſorte que tant de chiffres que l'on voudra, étant rangés de ſuite, leurs valeurs ſucceſſives, en allant de droite à gauche, ſont, *nombres ſimples* ou *unités*, *dizaines* d'unités ſimples, *dizaines de dizaines*, ou *centaines* d'unités ſimples.

Dizaines de centaines ou *mille*, *dizaines de mille*, *centaines de mille.*

Dizaines de centaines de mille ou *millions*, *dizaines de millions*, *centaines de millions.*

Dizaines de centaines de millions ou *billions*, *dizaines de billions*, *centaines de billions*, &c.

12. On trouvera ces valeurs dans les exemples ſuivans.

Exemple I.

178.	Centaines, Dizaines, Unités,	*ſextilliions.*
345.	Centaines, Dizaines, Unités,	*quintillions.*
763.	Centaines, Dizaines, Unités,	*quatrillions.*
921.	Centaines, Dizaines, Unités,	*trillions.*
384.	Centaines, Dizaines, Unités,	*billions.*
572.	Centaines, Dizaines, Unités,	*millions.*
694.	Centaines, Dizaines, Unités,	*mille.*
253.	Centaines, Dizaines, Unités,	*unités ſimples.*

Exemple II.

108.	Centaines, Dizaines, Unités,	*ſextilliona.*
380.	Centaines, Dizaines, Unités,	*quintillions.*
070.	Centaines, Dizaines, Unités,	*quatrillions.*
000.	Centaines, Dizaines, Unités,	*trillions.*
573.	Centaines, Dizaines, Unités,	*billions.*
039.	Centaines, Dizaines, Unités,	*millions.*
502.	Centaines, Dizaines, Unités,	*mille.*
350.	Centaines, Dizaines, Unités,	*unités ſimples.*

13. Dans l'exemple II. le zero qui eſt à la première place, à droite, exprime qu'il n'y a pas d'unités ſimples dans l'exemple propoſé, & ſert à conſerver aux chiffres ſuivans, vers la gauche, leurs rangs de valeur.

Le zero qui eſt entre les unités de mille & les centaines de mille, exprime que le nombre propoſé ne contient point de dizaines de mille, & ſert à conſerver aux chiffres ſuivans, vers la gauche, leurs rangs de valeur.

Le zero qui eſt entre les dizaines de millions & les unités de billions, exprime qu'il n'y a point de centaines de millions, & ſert encore à conſerver aux chiffres qui le ſuivent, vers la gauche, leurs rangs de valeur.

En général, le zero n'ayant aucune valeur propre, ne ſert qu'à marquer les rangs qui manquent de nombres, & à donner aux chiffres qui le ſuivent, vers la gauche, leurs rangs de valeur.

14. D'où il ſuit 1°. que, pour qu'un chiffre, par exemple 3, exprime des dizaines, des centaines ou des mille, &c. il ſuffit de le faire ſuivre vers la droite d'un zero, de deux zeros ou de trois zeros. En cette ſorte, 30, 300, 3000, &c.

En général, pour rendre un nombre dix fois ou cent fois, ou mille fois, &c. plus grand, il ſuffira d'écrire ce nombre avec un zero ou deux zeros, ou trois zeros, &c. à ſa droite. Etant propoſé, par exemple, le nombre 96, on le rendra dix fois plus grand, en écrivant 960; cent fois plus grand, en écrivant 9600; mille fois plus grand, en écrivant 96000, &c.

15. Il ſuit 2°. que, pour rendre dix fois, cent fois, mille fois, &c. plus petit un nombre qui a des zeros à ſa droite, il ſuffit de retrancher vers ſa droite un zero, deux zeros, trois zeros, &c. On rendra,

par exemple, le nombre 96000 dix fois plus petit, en écrivant 9600, & on le rendra cent fois plus petit, en écrivant 960, & enfin mille fois plus petit, en écrivant 96.

De même, étant propoſé un nombre quelconque 96834, on rendra ſa partie 96 dix fois, cent fois, mille fois plus petite; en retranchant le premier; les deux premiers, les trois premiers caracteres à droite, c'eſt-à-dire, en écrivant 9683, 968, 96, &c.

Car dans le nombre 96834, la partie 96 équivaut à 96000; & dans le nombre 9683, la partie 96 équivaut à l'expreſſion 9600, laquelle a un zero de moins à ſa droite; & dans le nombre 968, la partie 96 équivaut à 960, qui a deux zeros de moins à ſa droite que 96000. Enfin l'expreſſion 96 a trois zeros de moins que 96000.

ARTICLE IV.

16. Pour énoncer la valeur d'un nombre exprimé par une ſuite de chiffres poſés en ligne droite, les Arithméticiens commencent par partager cette ſuite de chiffres par la penſée ou par des points de trois en trois, en allant de droite à gauche: ainſi qu'on le voit (N° 12), ils nomment *tranches* les parties de cette ſuite de chiffres, coupée de trois en trois par des points.

La premiere tranche, à droite, contient des unités, des dizaines & des centaines d'*unités ſimples*.

La ſeconde, des unités, des dizaines & des centaines de *mille*.

La troiſieme tranche contient des unités, des dizaines & des centaines de *millions*.

Après la tranche des millions, viennent de ſuite, en allant de droite à gauche, les tranches des *billions*, des *trillions*, des *quatrillions*, des *quintillions*, des

ſextillions, des *ſeptillions*, des *octillions*, des *nonillions*, des *décillions*, &c. qui ont chacune leurs unités, leurs dizaines & leurs centaines.

Comme la diviſion d'une ſuite de chiffres en tranches ſe fait en allant de droite à gauche, quelquefois il arrive que la premiere tranche à gauche n'a que deux chiffres, ou même un ſeul, à ſçavoir des unités & des dizaines, ou des unités ſeulement.

Une ſuite de chiffres étant ainſi partagée en tranches, rien n'eſt plus facile que d'énoncer le nombre qu'elle exprime. On énonce ſucceſſivement, en allant de gauche à droite, la valeur de chaque tranche, obſervant de ne prononcer le nom de chaque tranche, que lorſqu'on eſt parvenu au chiffre du plus bas degré.

Pour énoncer, ſelon cette méthode, le nombre

Billions. Millions. Mille. Unités.

exprimé par 8. 345. 678. 923. on commencera par partager en tranches cette ſuite de chiffres, ainſi qu'on le voit : cette préparation fera connoître que le nombre propoſé renferme des billions, des millions, des mille & des unités.

Puis on dira, en allant de gauche à droite, huit billions, à cauſe du 8 dans la tranche des billions; trois cens quarante-cinq millions, pour la valeur de la tranche 345 des millions; ſix cens ſeptante-huit mille, pour la valeur de la tranche 678 des mille; enfin, neuf cens vingt-trois, pour la valeur de la tranche 923 des unités. Et, en mettant de ſuite ces valeurs, on dira, pour la valeur totale d'un nombre propoſé, huit billions, trois cens quarante-cinq millions, ſix cens ſeptante-huit mille, neuf cens vingt-trois.

Une ſuite de chiffres étant partagée en tranches, s'il ſe trouvoit dans quelques-unes ou dans toutes des

zeros à la place des unités, ou à la place des dizaines, ou à celle des centaines, ou à la fois à la place des dizaines & des unités, ou des dizaines & des centaines, ou à la place des centaines & des unités, ou enfin à la place des centaines & des unités, comme ces zeros n'expriment rien, & qu'ils ne ſervent qu'à conſerver aux autres chiffres leurs rangs de valeur, on énoncera la valeur de chaque tranche, en exprimant ſeulement les valeurs des autres chiffres qui y ſont contenus.

Billions. Millions. Mille. Unités.

Par exemple, le nombre 80. 604. 053. 480. s'énoncera de cette ſorte, quatre-vingt billions, ſix cens quatre millions, cinquante-trois mille, quatre cens quatre-vingt unités.

Que ſi une ou pluſieurs tranches ſont remplies par des zeros, on ſupprimera dans la nomination les noms de ces tranches.

Par exemple, le nombre 9. 000. 005. 000. 368. s'énoncera en diſant, neuf trillions, cinq millions, trois cens ſoixante-huit.

ARTICLE V.

17. Pour exprimer en chiffres un nombre quelconque propoſé, on exprimera ſucceſſivement, par autant de caracteres, les centaines, les dizaines & les unités des différens ordres qui ſeront contenus dans le nombre propoſé, & de même les zeros de centaines, de dizaines & d'unités qu'il pourra renfermer, obſervant de commencer l'expreſſion en allant de gauche à droite, c'eſt-à-dire, par le nombre des unités du plus haut degré.

Par exemple, le nombre nonante billions, quatre cens cinq millions, trois cens ſoixante-huit mille, vingt-cinq, s'exprimera ainſi,

90 405 368 025.

En écrivant 1°. 90 pour l'expreſſion de nonante billions, c'eſt-à-dire, de neuf dixaines de billions.

2°. 405 pour l'expreſſion des quatre cens cinq millions, c'eſt-à-dire, des quatre centaines, des zeros de dizaines, & de cinq unités de millions.

3°. 368 pour l'expreſſion des trois cens ſoixante-huit mille, c'eſt-à-dire, des trois centaines, des ſix dizaines, & des huit unités de mille.

4°. 025 pour l'expreſſion des vingt-cinq unités, c'eſt-à-dire, pour l'expreſſion de zero de centaines, des deux dizaines & des cinq unités.

18. Une fraction étant compoſée de deux nombres, à ſçavoir, du numérateur & du dénominateur, on exprimera une fraction par des chiffres, en exprimant chacun de ces deux nombres par des chiffres: on eſt convenu d'écrire d'abord le numérateur, puis le dénominateur au deſſous, avec une barre entre-deux. Par exemple, les fractions trois quarts, cinq huitiemes, vingt trentiemes, &c. s'expriment ainſi, $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{8}$. $\frac{20}{30}$. & ainſi des autres.

SECTION III.

Les Caracteres & les Signes que l'on employe dans l'Algebre, les différentes ſortes de grandeurs algébriques, la maniere de les écrire & de les réduire à des expreſſions plus ſimples.

ARTICLE I.

19. LES lettres de l'alphabet $a, b, c, d, e, f \ldots x, y, z$, ſont les ſignes dont on ſe ſert dans l'Algebre pour exprimer les grandeurs; & pour en repréſenter les opérations, de même que leur égalité & leur inégalité, on eſt convenu des ſignes ſuivans.

20. Le ſigne + indique l'addition : on le nomme *plus*, & il ſignifie que la grandeur dont il eſt ſuivi, eſt ajoutée à celle qui le précede.

Par exemple, $a + b$ ſignifie que la grandeur b eſt ajoutée à la grandeur a, & ſe prononce en diſant a plus b.

21. Le ſigne — indique la ſouſtraction : on le nomme moins, & il ſignifie que la grandeur qui le ſuit, eſt retranchée de la grandeur qui le précede.

Par exemple, l'expreſſion $a - b$ ſignifie que la grandeur b eſt retranchée de la grandeur a, & ſe prononce en diſant a moins b.

22. Le ſigne × indique la multiplication : il ſe prononce *multiplié par*, & ſignifie que la grandeur qui le précede eſt multipliée par celle qui le ſuit.

Par exemple, l'expreſſion $a \times b$, déſigne que la grandeur a doit être multipliée par la grandeur b.

Pour indiquer, par le ſigne ×, que pluſieurs quantités doivent être multipliées par une autre quantité, on lie toutes celles qui doivent être multipliées par une ligne que l'on tire au deſſus d'elles, on les fait ſuivre du ſigne × de multiplication, après lequel on place la grandeur qui multiplie.

Par exemple, ſi les quantités $a - b + c$ doivent être multipliées par la quantité $+ d$.

On écrit $\overline{a - b + c} \times d$; & lorſque le multiplicateur eſt auſſi compoſé de pluſieurs quantités, on les lie de même par une ligne que l'on tire au-deſſus d'elles.

Par exemple, ſi les quatre quantités $a - b + c + d$ doivent être multipliées par $+ f + g$

on écrit $\overline{a - b + c + d} \times \overline{f + g}$.

On reconnoîtra dans l'expreſſion qui ſuit $\overline{a + c - f} \times \overline{d + h}$ ſeulement la multiplication des

quantités $+c-f$ par la quantité d; car, ſi l'on eût voulu marquer la multiplication de toutes les quantités $a+c-f$ par les deux quantités $d+h$, on eût lié enſemble les premieres, & enſemble les dernieres, en cette ſorte, $\overline{a+c-f} \times \overline{d+h}$.

23. Quant à la maniere d'exprimer le produit de deux grandeurs, on eſt convenu de placer à côté l'une de l'autre les lettres qui les expriment, ſans aucun ſigne entr'elles.

Par exemple, pour exprimer le produit des deux grandeurs a, b, on écrit ab; & pour exprimer le produit des quatre grandeurs a, b, c, d, multipliées enſemble, on écrit $abcd$.

24. On indique la diviſion algébrique comme la fraction arithmétique, par une ligne horizontale entre le dividende & le diviſeur : le dividende eſt au deſſus, & le diviſeur au deſſous.

Par exemple, pour exprimer que la grandeur a eſt diviſée par la grandeur b, on écrit $\frac{a}{b}$, & l'on prononce *a* diviſé par *b*.

25. Le ſigne $=$ indique l'égalité : on le prononce *égale*, & il exprime que ce qui le précede eſt égal à ce qui le ſuit. Par exemple, l'expreſſion $a=b$ déſigne que la grandeur a eſt égale à la grandeur b.

L'expreſſion $a+c=b+d$ déſigne que les grandeurs $a+c$ valent enſemble les grandeurs $b+d$, auſſi priſes enſemble.

26. Les ſignes $>$, $<$ indiquent l'inégalité : le premier ſe nomme *plus grand que*, & le ſecond, *plus petit que*. Ils déſignent l'un & l'autre que ce qui eſt du côté de l'ouverture eſt plus grand que ce qui eſt du côté de la pointe.

Par exemple, l'expreſſion $a>b$ ſignifie que la

grandeur a eſt plus grande que la grandeur b.

Et l'expreſſion $a < b + d$ ſignifie que la grandeur a eſt moindre que les grandeurs $b + d$, priſes enſemble.

27. Les grandeurs ſéparées par le ſigne $=$, ſe nomment *membres d'égalité*; & celles qui ſont ſéparées par les ſignes $><$, ſe nomment *membres d'inégalité*. On appelle *premier membre* celui qui eſt à gauche de ces ſignes, & *ſecond membre*, celui qui eſt à droite.

On remarquera que les ſignes dont on vient de parler, ne ſont pas ſi particuliers à l'Algebre, que l'on ne les employe auſſi dans l'Arithmétique & dans la Géométrie.

ARTICLE II.

On diſtingue différentes ſortes de grandeurs algébriques, à ſçavoir, les poſitives & les négatives, les complexes & les incomplexes.

28. Une grandeur eſt dite *poſitive* lorſqu'elle eſt précédée du ſigne de l'addition, exprimé ou ſous-entendu. Elle eſt dite *négative* lorſqu'elle eſt précédée du ſigne de la ſouſtraction. Ainſi $+ a$ ou a, $+ ab$ ou ab, ſont des grandeurs poſitives; & les grandeurs $- a$, $- b$, $- ab$, ſont négatives.

On voit par cette définition que la grandeur poſitive & la grandeur négative ſont des grandeurs également réelles, mais priſes dans un ſens contraire. Si la premiere exprime une dette que l'on a, la ſeconde exprime un bien que l'on poſſede.

29. Une grandeur algébrique eſt dite *complexe* lorſqu'elle eſt compoſée de deux ou de pluſieurs grandeurs réunies par les ſignes de l'addition ou de la ſouſtraction. Par exemple, $a + b$, $a - b + c + d$, ſont des grandeurs complexes. On nomme *termes* les quantités liées par les ſignes $+$, $-$.

Dans la grandeur complexe $a + b - c$, la quantité

a eſt un terme, la quantité $+ b$ en eſt un autre, & la quantité $- c$ en eſt un troiſieme.

Une grandeur algébrique eſt dite *incomplexe* lorſqu'elle ne comprend qu'un ſeul terme. Ainſi $+ a$ eſt une grandeur incomplexe, $- b$ en eſt une autre, de même la quantité $+ ab$ ou $- ab$ eſt incomplexe, parce que les lettres a & b ne ſont point réunies par les ſignes $+$ ou $-$.

La grandeur incomplexe ſe nomme *monome*, & la grandeur complexe ſe nomme en général *polinome*, & en particulier *binome*, *trinome*, *quadrinome*, &c. ſelon qu'elle a deux ou trois, ou quatre, &c. termes.

30. La grandeur incomplexe, de même que le premier terme de la grandeur complexe, eſt ſuppoſé poſitif, c'eſt-à-dire qu'on lui ſuppoſe le ſigne $+$, lorſqu'il n'eſt précédé d'aucun ſigne. Ainſi a équivaut à $+ a$, & l'expreſſion $a + b$ équivaut à $+ a + b$.

ARTICLE III.

31. Comme la valeur des termes d'une quantité algébrique complexe ne dépend pas du rang qu'ils peuvent occuper les uns à l'égard des autres, il eſt évident que dans l'expreſſion d'une quantité algébrique, on peut écrire les termes en quel ordre l'on veut, pourvû qu'ils conſervent les mêmes ſignes poſitifs ou négatifs.

Par exemple, la quantité $a - b + c - d$ peut s'exprimer de cette ſorte : $a + c - b - d$, ou bien, $- b - d + a + c$, &c.

Ce qui a principalement occupé les Algébriſtes, c'eſt de donner aux quantités les expreſſions les plus courtes poſſibles. A ce deſſein ils ont introduit dans l'Algebre deux ſortes de chiffres, à ſçavoir, le *coefficient* & l'*expoſant*.

ARTICLE

ARTICLE IV.

32. L'exposant d'une lettre est un chiffre placé un peu au dessus, & à droite de cette lettre. Il exprime par le nombre de ses unités ce que la lettre auroit été écrite de fois par la multiplication.

Par exemple, dans l'expression a^2, le chiffre 2 désigne que la lettre a doit être censée écrite deux fois de suite, de cette sorte, $a\,a$; ce qui est le produit de la grandeur a multipliée par a ou par elle-même (n° 23.).

Dans l'expression a^3, le chiffre 3 désigne que la lettre a doit être censée écrite trois fois de suite, de cette sorte $a\,a\,a$; ce qui est le produit de la grandeur a multipliée par a, puis par a ou le produit de la grandeur a multipliée deux fois successivement par elle-même (23.).

En général l'exposant, diminué de l'unité, exprime combien de fois une lettre doit être multipliée successivement par elle-même. Dans l'expression a^8, l'exposant 8, diminué de l'unité, est 7, & il exprime que la grandeur a doit être multipliée sept fois de suite par elle-même.

33. Une lettre qui n'a pas d'exposant marqué, est toujours supposée avoir l'unité pour exposant. Par exemple, la grandeur a équivaut à a^1; car la lettre a étant écrite une seule fois sans exposant, n'est pas multipliée par elle-même. Or l'exposant 1, diminué de l'unité, devient zero, & marque ce défaut de multiplication: par les mêmes raisons $a\,b\,c$ est la même chose que $a^1\,b^1\,c^1$, & ainsi des autres.

34. Un exposant indéterminé s'exprime par une lettre. Par exemple, dans l'expression a^m, la lettre m désigne la quantité de fois quelconque que la lettre a doit être écrite par la multiplication, ou la quantité de fois indéterminée, moins une, que cette lettre doit être multipliée par elle-même.

ARTICLE V.

35. Le coëfficient eſt un chiffre placé à la gauche d'un terme, & ſur la même ligne; il exprime combien de fois le terme auquel il eſt appliqué doit être répété. Par exemple, dans l'expreſſion $4ab$, le chiffre 4 exprime que la grandeur ab doit être répétée quatre fois, c'eſt-à-dire, multipliée par 4.

Dans la grandeur complexe $2a - 5d$, il y a deux coëfficiens 2 & 5. Le premier exprime que le terme a doit être répété deux fois, & le ſecond indique que le terme d doit être répété cinq fois.

36. Un terme qui n'a pas de coefficient marqué eſt toujours ſuppoſé avoir l'unité pour coefficient.

Par exemple, a équivaut à $1a$, & $-ab$ vaut $-1ab$.

37. On voit par la définition de l'expoſant & du coëfficient que ces chiffres abregent de beaucoup les expreſſions algébriques. Etant donnée, par exemple, la grandeur $aaaabb + cc - ddddd$, elle devient, par le moyen des expoſans, $a^4b^2 + c^2 - d^5$.

Etant donnée la grandeur $a + a + b + a + b$, elle devient, par le moyen des coefficiens $3a + 2b$.

Etant donnée la quantité $6ab - ab - 5d - d$, elle devient, en opérant ſur les coefficiens, $5ab - 6d$.

1°. En mettant $5ab$ à la place de $6ab - ab$; car il eſt évident que la grandeur ab étant ajoutée ſix fois, ce qui s'exprime par $6ab$, & retranchée une fois; ce qui eſt exprimé par $-ab$, elle n'eſt ajoutée réellement que cinq fois; ce qui ſera exprimé par $5ab$.

2°. En mettant $-6d$ à la place de $-5d - d$, étant évident que la grandeur d étant retranchée cinq fois; ce qui eſt exprimé par $-5d$, & une fois; ce qui eſt exprimé par $-d$, elle eſt retranchée ſix fois; ce qui ſera exprimé par $-6d$.

Comme rien n'eſt plus eſſentiel dans toutes les parties de l'Algebre que de réduire les quantités à leurs plus ſimples expreſſions, les Algébriſtes en ont fait une regle particuliere, comme ſous le nom de *réduction.*

ARTICLE VI.

38. Lorſque dans une quantité algébrique il ſe trouve des termes ſemblables, c'eſt-à-dire, des termes qui ont les mêmes lettres écrites le même nombre de fois.

1°. Si ces termes ſemblables ſont affectés des mêmes ſignes, c'eſt-à-dire, s'ils ſont tous poſitifs ou négatifs, on les réduit à un ſeul terme précédé du ſigne commun à tous les termes, & d'un coefficient égal à la ſomme de leurs coefficiens.

Par exemple, la quantité $3ab + 2ab + cd$ ſe réduit à $5ab + cd$.

En prenant $5ab$ à la place de $3ab + 2ab$, & en écrivant $+ cd$ tel qu'il eſt, parce qu'il eſt ſeul de ſon eſpece.

De même la quantité $-3ab - 2ab + cd$ ſe réduit à celle-ci $-5ab + cd$.

En prenant $-5ab$ à la place de $-3ab - 2ab$, & en écrivant $+ cd$ tel qu'il eſt, parce qu'il eſt ſeul de ſon eſpece.

2°. Si deux termes ſemblables, qui entrent dans une quantité, ſont affectés de ſignes différens, c'eſt-à-dire, s'ils ſont l'un poſitif, & l'autre négatif, on les réduit à un ſeul terme précédé du ſigne du plus grand coefficient, & qui ait pour coefficient la différence des deux coefficiens.

Par exemple, la quantité $5c^2d + ab - 2c^2d$ ſe réduit à $3c^2d + ab$.

1°. En prenant $+ 3c^2d$ à la place de $+ 5c^2d - 2c^2d$; car il eſt évident que la quantité c^2d étant

ajoutée cinq fois, ce qui eſt exprimé par $+ 5\ c^2\ d$, & étant retranchée deux fois, ce qui eſt indiqué par $2\ c^2\ d$, elle n'eſt réellement ajoutée que trois fois; ce qui ſera exprimé par $+ 3\ c^2\ d$.

2°. En écrivant $+ a\ d$ tel qu'il eſt, parce qu'il eſt ſeul de ſon eſpece.

De même la quantité $2\ c^2\ d + a\ d - 8\ c^2\ d$ ſe réduit à la quantité $- 6\ c^2\ d + a\ d$.

En prenant $- 6\ c^2\ d$ pour la valeur de $+ 2\ c^2\ d - 8\ c^2\ d$, & en écrivant $+ a\ d$ tel qu'il eſt.

3°. Si dans une quantité complexe il ſe trouve pluſieurs termes ſemblables poſitifs, & pluſieurs autres termes ſemblables aux premiers, mais négatifs, on commence par réduire à un ſeul terme tous les poſitifs, & on réduit de même à un ſeul terme tous les négatifs, puis on fait la réduction de ces deux termes comme on vient de le dire.

Par exemple, étant propoſée la quantité $5\ a\ b + 3\ a\ b + a\ b - 2\ a\ b + c\ d - 6\ a\ b$, on fera d'abord $9\ a\ b = 5\ a\ b + 3\ a\ b + a\ b$, on fera enſuite $- 8\ a\ b = - 2\ a\ b - 6\ a\ b$.

Enfin on réduira $9\ a\ b - 8\ a\ b$ au terme $a\ b$, & ce terme $+ a\ b$ ſera la valeur de la ſuite des termes $+ 5\ a\ b + 3\ a\ b + a\ b - 2\ a\ b - 6\ a\ b$. Ainſi, en mettant à côté de $a\ b$ le terme $+ c\ d$, qui eſt ſeul de ſon eſpece, la quantité réduite ſera $a\ b + c\ d$.

Enfin, ſi les termes ſemblables ont des ſignes contraires & des coefficiens égaux, ils ſe réduiſent à zero : c'eſt pourquoi on les effacera dans l'expreſſion de la quantité où ils ſe trouvent.

Par exemple, la quantité $a^2 + 2\ a\ d - 2\ a\ d + d^2$ ſe réduit à $a^2 + d^2$. Etant évident que la quantité $a\ d$ étant ajoutée deux fois, ce qui eſt exprimé par $+ 2\ a\ d$, & retranchée deux fois, ce qui eſt exprimé par $- 2\ a\ d$, elle ſe réduit à rien.

CHAPITRE SECOND.

De l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication & la Diviſion des nombres ſimples.

ARTICLE I.

Addition des nombres ſimples.

39. AJOUTER *enſemble* deux ou pluſieurs nombres propoſés, c'eſt compoſer avec les nombres propoſés un nombre total, c'eſt-à-dire, un nombre qui en ſoit la ſomme.

Si les nombres propoſés ſont exprimés chacun par un ſeul chiffre, on n'a pas beſoin de regles pour en trouver la ſomme. Par exemple, on voit d'abord que ces deux nombres 2 & 3 ſont enſemble le nombre 5 : on voit de même tout de ſuite que $6 + 4 + 9 = 19$.

Si les nombres propoſés ſont exprimés chacun par pluſieurs chiffres, alors il faut des regles qui ſuppléent aux bornes de notre eſprit. On trouvera ces regles dans la ſolution du problême ſuivant.

PROBLÊME.

40. *Ajouter enſemble pluſieurs nombres exprimés par tant de chiffres que l'on voudra.*

SOLUTION.

Les nombres que l'on propoſe d'ajouter, étant repréſentés par pluſieurs chiffres, c'eſt-à-dire, étant compoſés d'unités, de dizaines, de centaines (n° 11, 12.),

&c. il eſt viſible que l'on en trouvera la ſomme totale, en faiſant ſucceſſivement la ſomme des unités, celle des dizaines, celle des centaines, &c. Ainſi, pour trouver la ſomme de pluſieurs nombres donnés, on propoſera la regle ſuivante.

On écrira les uns ſous les autres les nombres propoſés, enſorte que les unités ſoient ſous les unités, les dizaines ſous les dizaines, les centaines ſous les centaines, &c. Les chiffres de même degré étant ainſi diſpoſés dans une colonne verticale, on tirera une ligne au deſſous de tous ces nombres.

On fera enſuite la ſomme des chiffres qui ſont dans la colonne des unités; & ſi cette ſomme ne ſurpaſſe pas 9, on l'écrira au deſſous de la barre, dans la colonne des unités. Si cette ſomme ne peut être repréſentée que par pluſieurs chiffres, on écrira au deſſous de la barre le chiffre des unités de cette ſomme, & l'on retiendra le nombre des dizaines de cette ſomme pour l'ajouter avec les chiffres de la ſeconde colonne, leſquels expriment des dizaines relativement à la premiere colonne.

On opérera de même ſur la ſeconde colonne, ſur la troiſieme, ainſi de ſuite, juſqu'à la colonne la plus à gauche; & quand on aura ajoûté enſemble les chiffres de cette derniere colonne avec le chiffre, ou avec les chiffres que l'on aura retenu de la colonne précédente, on écrira le nombre qui réſultera au deſſous de la barre, dans cette derniere colonne.

Ces additions particulieres étant faites, le nombre écrit au deſſous de la barre, ſera la ſomme des nombres propoſés, puiſqu'il contiendra la ſomme des unités, celle des dizaines, celle des centaines, &c. des nombres propoſés.

EXEMPLE I.

Ajouter enſemble les nombres 452, 337.

OPÉRATION.

Ces nombres étant ainſi diſpoſés en colonne, & ayant tiré une barre au deſſous,

452
337

on déterminera leur ſomme. . . . . 789.

En opérant comme il ſuit.

1°. On fera la ſomme de la colonne des unités, en diſant, 7 & 2 font 9; & comme ce nombre neuf peut être exprimé par un ſeul chiffre 9, on l'écrira au deſſous de la barre, dans la colonne des unités.

2°. On fera la ſomme des chiffres de la colonne des dizaines, en diſant, 3 dizaines & 5 dizaines font 8 dizaines; & comme ce nombre huit dizaines peut être exprimé par le ſeul chiffre 8, placé au rang des dizaines, on écrira 8 au deſſous de la barre, dans le rang des dizaines.

3°. On fera la ſomme des chiffres de la colonne des centaines, en diſant, 3 centaines & 4 centaines font 7 centaines; & comme ce nombre ſept centaines peut être exprimé par un ſeul chiffre 7, écrit au rang des centaines, on l'écrira ſous la barre, au rang des centaines.

Ayant ainſi déterminé la ſomme de chaque colonne, on trouvera que la ſomme des nombres propoſés eſt 789.

EXEMPLE II.

Ajouter enſemble les nombres 6098, 4607, 394.

OPÉRATION.

Ces nombres étant ainſi diſpoſés en colonne, & ayant tiré une barre au deſſous,

6098
4607
394

on déterminera leur ſomme. . . . . 11099.

En opérant comme il ſuit.

1°. On fera la ſomme des chiffres de la colonne des unités, en diſant 4 & 7 font 11, & 8 font 19, c'eſt-à-dire, 9 unités ſimples, & une dizaine, on écrira 9 ſous la barre, dans la colonne des unités, & on retiendra une dizaine pour l'ajouter avec les chiffres de la colonne des dizaines.

2°. On fera la ſomme des chiffres de la colonne des dizaines, en diſant, 1 dizaine retenue de la colonne des unités, & 9 font 10, & 0 font 10, & 9 font 19 dizaines, c'eſt-à-dire, 9 dizaines & une centaines ou une dizaine de dizaines: on écrira les 9 dizaines au deſſous de la barre, & l'on retiendra 1 centaine pour l'ajouter avec les chiffres de la colonne des centaines.

3°. On fera la ſomme des chiffres de la colonne des centaines, en diſant, 1 centaine que l'on a retenue de la colonne des dizaines, & 3 font 4, & 6 font 10, & 0 font 10, c'eſt-à-dire, zero d'unités de centaines, & une dizaine de centaines ou 1 mille: on écrira zero au deſſous de la barre, dans la place des centaines, & l'on retiendra 1 mille pour l'ajouter avec les chiffres de la colonne des mille.

4°. On fera la ſomme des chiffres de la colonne des mille, en diſant, 1 mille que l'on a retenu, & 4 font 5, & 6 font 11, c'eſt-à-dire, 1 mille & une dizaine de mille: on écrira 1 mille ſous la barre, dans la colonne des unités de mille. A l'égard de 1 dizaine

de mille, comme il n'y a point d'autre colonne à ajouter, on écrira 1 à la gauche du chiffre 1 des unités de mille.

Ayant ainſi déterminé la ſomme des chiffres de chaque colonne, on trouvera que la ſomme des nombres propoſés eſt 11099.

ARTICLE II.

De la Souſtraction des nombres ſimples.

41. *Souſtraire* un nombre d'un plus grand, c'eſt déterminer la différence de ces deux nombres, c'eſt-à-dire, l'excès du plus grand ſur le plus petit.

Si les nombres propoſés ſont exprimés chacun par un ſeul chiffre, on déterminera leur différence ſans aucun art. On voit d'abord que l'excès de 7 ſur 4 eſt 3; on voit de même que $9 - 4 = 5$.

Si les nombres dont on demande la différence ſont exprimés chacun par pluſieurs caracteres, alors il faudra des regles, & on les trouvera dans la ſolution du problême ſuivant.

PROBLÊME.

42. *Déterminer la différence de deux nombres exprimés par tant de chiffres que l'on voudra.*

SOLUTION.

Les nombres dont on demande la différence, étant repréſentés chacun par pluſieurs chiffres, c'eſt-à-dire, étant compoſés d'unités, de dizaines, de centaines (n° 11, 12.), &c. il eſt évident qu'on déterminera leur différence en prenant ſucceſſivement la différence de leurs unités, celle de leurs dizaines, celle de leurs centaines, &c. Ainſi, pour trouver la différence de deux nombres donnés, on propoſera la regle ſuivante.

On écrira le plus petit des deux nombres donnés ſous le plus grand, de maniere que les unités, les dizaines, les centaines, &c. de l'un répondent aux unités, dizaines, centaines, &c. de l'autre, & on tirera une barre au deſſous de ces deux nombres, pour les ſéparer de celui qui doit être leur différence.

On retranchera enſuite ſucceſſivement les unités, les dizaines, les centaines, &c. du nombre inférieur des chiffres correſpondans dans le nombre ſupérieur.

Or, dans ces ſouſtractions particulieres, il peut arriver trois cas: ou le chiffre inférieur eſt plus petit que le chiffre ſupérieur, ou il lui eſt égal, ou il eſt plus grand.

Si le chiffre inférieur eſt plus petit que le ſupérieur, on écrira l'excès de celui-ci au deſſous de la barre, dans la même colonne.

Si le chiffre inférieur eſt égal au ſupérieur, il eſt viſible qu'en retranchant le premier du ſecond, il ne reſtera rien : c'eſt pourquoi on écrira zero au deſſous de la même colonne.

Si le chiffre inférieur eſt plus grand que le ſupérieur, on rendra la ſouſtraction poſſible en ajoutant au chiffre ſupérieur 10 unités de ſon rang; puis de la ſomme de cette dizaine & de ce chiffre ſupérieur on ôtera le chiffre inférieur, & l'on écrira le reſte au deſſous, dans la même colonne. Enſuite, comme le nombre ſupérieur eſt devenu plus grand de la dizaine ajoutée, on augmentera également le nombre inférieur, en ajoutant dans le dernier, au chiffre qui précede immédiatement vers la gauche le chiffre que l'on vient de retrancher, une unité, laquelle vaut 1 dizaine, par rapport au rang du chiffre derniérement retranché (n° 11.).

Exemple I.

Déterminer la différence des nombres 795, 353.

Opération.

Ces nombres étant disposés en colonne, le plus petit sous le plus grand, & ayant tiré une barre au dessous,

795
353

on déterminera leur différence. . . . . 442.

En opérant comme il suit.

1°. On retranchera les unités du nombre inférieur des unités du nombre supérieur, en disant, 3 retranché de 5, reste 2, & on écrira 2 au dessous de la barre, dans la colonne des unités.

2°. On retranchera les dizaines du nombre inférieur des dizaines du nombre supérieur, en disant, 5 retranché de 9, reste 4, que l'on écrira au dessous de la barre, dans le rang des dizaines.

3°. On retranchera les centaines du nombre inférieur des centaines du nombre supérieur, en disant, 3 retranché de 7, reste 4, & on écrira 4 au dessous de la barre, dans la colonne des centaines.

L'excès du nombre 795, sur le nombre 353, sera donc 442.

Exemple II.

Déterminer la différence des nombres 530629, 12459.

Opération.

Les nombres étant disposés en colonne, le plus petit sous le plus grand, & ayant tiré une barre au dessous,

530629
12459

on déterminera leur différence. . . . . 518170.

En opérant comme il suit.

1°. On retranchera les unités du nombre inférieur des unités du nombre ſupérieur, en diſant, 9 retranché de 9, il ne reſte rien, & on écrira zero au deſſous de la barre, dans la colonne des unités.

2°. On paſſera à la colonne des dizaines; & comme les 5 dizaines inférieures ne peuvent être retranchées des deux dizaines ſupérieures, on ajoutera 10 dizaines avec les 2 dizaines ſupérieures; ce qui fera 12 dizaines, deſquelles on retranchera les 5 dizaines inférieures, en diſant, 5 retranché de 12, reſte 7, que l'on écrira au deſſous de la barre, dans la colonne des dizaines.

3°. On paſſera à la colonne des centaines; & pour augmenter le nombre inférieur autant que l'on a augmenté le nombre ſupérieur, ou ajoutera 1 avec le chiffre 4 des centaines du nombre inférieur, parce que cette unité miſe au rang des centaines, vaut 10 à l'égard de la colonne des dizaines, ſur laquelle on vient d'opérer (n° 11.); puis on retranchera la ſomme $4 + 1 = 5$ du chiffre ſupérieur 6, en diſant, 5 retranché de 6, reſte 1, que l'on écrira ſous la barre, dans la colonne des centaines.

4°. On paſſera à la colonne des mille; & comme les deux mille inférieurs ne peuvent être retranchés de zero de mille, dans le nombre ſupérieur, on ajoutera une dizaine à ce zero; ce qui fera $10 + 0 = 10$ unités de mille, deſquelles on retranchera les 2 mille inférieurs, en diſant, 2 retranché de 10, reſte 8, que l'on écrira au deſſous de la barre, dans la colonne des unités de mille.

5°. On paſſera à la colonne des dizaines de mille; & pour augmenter le nombre inférieur autant que l'on a augmenté le nombre ſupérieur, on ajoutera au chiffre 1 des dizaines de mille une unité, laquelle vaut 10 à l'égard de la colonne des unités de mille,

ſur laquelle on vient d'opérer ; puis on retranchera la ſomme 1 + 1 = 2 du chiffre ſupérieur 3, en diſant, 2 de 3, reſte 1, que l'on écrira ſous la barre, dans la colonne des dizaines de mille.

6°. On paſſera au nombre des centaines de mille, lequel eſt le dernier ; & comme il n'y a point de chiffre inférieur à retrancher, on dira, ſi de 5 on n'ôte rien, il reſtera 5, que l'on écrira au deſſous de la barre, au rang des centaines de mille.

La différence des deux nombres propoſés, 530629, 12459, eſt donc 518170.

ARTICLE III.

Preuves de l'Addition & de la Souſtraction.

DÉFINITION.

L'opération que l'on fait pour connoître ſi l'on a commis quelqu'erreur en opérant, ſe nomme *preuve.*

Preuve de la Souſtraction.

43. Le nombre que l'on aura ſouſtrait, & la différence de ce nombre à celui dont on a ſouſtrait, pouvant être regardée comme toutes les parties du nombre dont on a ſouſtrait, il eſt évident qu'un moyen de s'aſſurer que l'on ne s'eſt pas trompé dans la Souſtraction, c'eſt-à-dire, que l'on a trouvé la vraie différence des nombres propoſés, c'eſt d'ajouter la différence trouvée au nombre que l'on a ſouſtrait ; & ſi la ſomme réſultante ſe trouve égale au nombre dont on a ſouſtrait, on conclura que l'on a trouvé la vraie différence.

On eſt ſûr, par exemple, que dans la Souſtraction { 530629 / 12459

on a pour vraie différence 518170

parce qu'en ajoutant enſemble 530629
le nombre ſouſtrait, la différence trouvée, il revient le nombre dont a ſouſtrait.

Preuve de l'Addition.

44. Les nombres que l'on a ajoutés enſemble doivent être regardés comme toutes les parties du réſultat de l'Addition, c'eſt-à-dire, de la ſomme trouvée (3.). Ainſi, retranchant de la ſomme trouvée tous les nombres que l'on aura ajoutés, il ne doit rien reſter de cette ſomme, ſi l'on ne s'eſt pas trompé en faiſant l'addition.

On propoſera donc, pour prouver l'addition, de retrancher les nombres propoſés de la ſomme que l'on aura trouvée.

Un exemple ſuffira pour faire connoître la maniere dont on fait cette ſouſtraction.

Suppoſant que dans l'addition des nombres { 986 / 549

on a trouvé pour ſomme. 1535
220

1°. Commençant la ſouſtraction par la gauche, on ajoutera enſemble les 9 centaines & les 5 centaines; ce qui donnera 14 centaines, que l'on retranchera des 15 centaines de la ſomme: il reſtera 1 centaine, que l'on écrira ſous le chiffre 5 des centaines de la ſomme.

2°. On fera la ſomme des dizaines des nombres propoſés; ce qui donnera 12 dizaines, que l'on retranchera de 13 dizaines qui reſtent dans la ſomme: il reſtera 1 dizaine, que l'on écrira ſous le chiffre 3

des dizaines de la ſomme, & l'on coupera par un trait la premiere partie à gauche des 13 dizaines de la ſomme, ſur leſquelles on vient d'opérer.

3°. On ajoutera enſemble les unités des nombres propoſés, qui donneront 15, qu'on retranchera des 15 unités qui reſtent dans la ſomme. Comme il ne reſtera rien, on écrira zero ſous le dernier chiffre de la ſomme, & l'on coupera encore d'un trait le premier caractere des 15 unités de la ſomme.

Cette opération faiſant connoître que la ſomme eſt épuiſée, après en avoir retranché toutes les parties des nombres ajoutés, on conclura que le nombre 1535 eſt la vraie ſomme des nombres propoſés.

ARTICLE IV.

De la Multiplication des nombres ſimples.

45. *Multiplier* un nombre ſimple par un autre nombre ſimple, c'eſt prendre le premier autant de fois qu'il y a d'unités dans le ſecond, & par conſéquent c'eſt former un troiſieme nombre que l'on nomme *produit*, qui contient le premier, que l'on appelle *multiplicande* autant de fois qu'il y a d'unités dans le ſecond, que l'on appelle le *multiplicateur*.

Par exemple, multiplier 8 par 3, c'eſt répéter 8 trois fois; ce qui produira le nombre 24, qui renferme le multiplicande 8 autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur 3, c'eſt-à-dire, 3 fois.

Cette définition de la Multiplication ſuffira pour établir la vérité des propoſitions ſuivantes.

PROPOSITION I.

46. *Dans la multiplication de deux grandeurs, ſi l'on multiplie l'un des produiſans, lequel on voudra, par une quantité quelconque, l'autre produiſant reſtant*

le même, le produit fait de la multiplication de ce nouveau produiſant par l'autre produiſant, ſera égal au premier produit multiplié par la même quantité qui a ſervi de multiplicateur à l'un des produiſans.

C'eſt-à-dire que 1°. ſi dans la multiplication de deux grandeurs, le multiplicateur reſtant le même, le multiplicande devient deux fois ou trois fois, ou dix fois ou cent fois plus grand qu'il étoit; le produit de ce nouveau multiplicande ſera auſſi 2 fois ou 3 fois, ou 10 fois ou 100 fois plus grand que le premier produit.

Car, puiſque dans la multiplication le produit renferme le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur (n° 45.), il eſt évident que, le multiplicateur reſtant le même, & le multiplicande devenant 2 fois ou 3 fois, ou 10 fois ou 100 fois, &c. plus grand qu'il étoit, le nouveau produit renfermera un multiplicande double ou triple, ou décuple ou centuple, &c. autant de fois que le premier produit contenoit le multiplicande ſimple.

C'eſt-à-dire 2°. que ſi, le multiplicande ſimple reſtant le même, le multiplicateur devient 2 fois ou 3 fois, ou 10 fois ou 100 fois, &c. plus grand qu'il étoit; le produit par ce nouveau multiplicateur ſera auſſi double ou triple, ou décuple ou centuple, &c. du premier produit.

Car le nouveau produit contiendra le même multiplicande 2 fois ou 3 fois, ou 10 fois ou 100 fois, plus que le premier produit ne le contenoit.

PROPOSITION II.

47. *Dans la multiplication de deux nombres le produit ſera le même, lequel on prenne pour le multiplicande ou pour le multiplicateur.*

Par exemple, dans la multiplication des nombres 8, 4, *on*

4, *on a également* 32, *ſoit qu'on multiplie* 8 *par* 4, *ou* 4 *par* 8.

Car tout nombre peut être conſidéré comme le produit de la multiplication de lui-même par l'unité : par conſéquent $8 = 1 \times 8$.

Or on rendra le produit 1×8, 4 fois plus grand, en faiſant ſervir 4 de multiplicateur, ou au produiſant 1, de cette ſorte, $1 \times 4 \times 8$ (n° 46); ce qui ſe réduit à 4×8, ou au produiſant 8, de cette ſorte, $1 \times 8 \times 4$; ce qui ſe réduit à 8×4. Ainſi $4 \times 8 = 8 \times 4$.

PROPOSITION III.

48. *Dans la multiplication de deux nombres le produit renferme l'un de ſes produiſans, lequel on voudra, autant de fois qu'il eſt déſigné par l'autre.*

Par exemple, le produit 32, *fait de la multiplication de* 8 *par* 4, *contient* 8 *autant de fois qu'il eſt déſigné par* 4, *& contient* 4 *autant de fois qu'il eſt déſigné par* 8.

Ce qui eſt clair, puiſque le produit renferme le multiplicande autant de fois qu'il eſt déſigné par le multiplicateur (n° 45), & que le produit de deux nombres reſte le même, lequel des deux on prenne pour multiplicande ou pour multiplicateur (n° 47).

La multiplication de deux nombres exprimés chacun par un ſeul chiffre, eſt ſans aucune difficulté; on voit d'abord qu'en multipliant 4 par 2, le produit eſt 8; on voit de même tout de ſuite que $5 \times 2 = 10$, que $6 \times 3 = 18$, &c.

Comme, pour multiplier les nombres exprimés par pluſieurs chiffres, il eſt néceſſaire de ſçavoir les produits des nombres repréſentés par un ſeul chiffre, on a jugé à propos de donner une table qui contînt ces produits.

TABLE.

49. Des produits des nombres repréſentés par un ſeul chiffre.

2 × 1 = 2	4 × 1 = 4	6 × 1 = 6	8 × 1 = 8
2 × 2 = 4	4 × 2 = 8	6 × 2 = 12	8 × 2 = 16
2 × 3 = 6	4 × 3 = 12	6 × 3 = 18	8 × 3 = 24
2 × 4 = 8	4 × 4 = 16	6 × 4 = 24	8 × 4 = 32
2 × 5 = 10	4 × 5 = 20	6 × 5 = 30	8 × 5 = 40
2 × 6 = 12	4 × 6 = 24	6 × 6 = 36	8 × 6 = 48
2 × 7 = 14	4 × 7 = 28	6 × 7 = 42	8 × 7 = 56
2 × 8 = 16	4 × 8 = 32	6 × 8 = 48	8 × 8 = 64
2 × 9 = 18	4 × 9 = 36	6 × 9 = 54	8 × 9 = 72
3 × 1 = 3	5 × 1 = 5	7 × 1 = 7	9 × 1 = 9
3 × 2 = 6	5 × 2 = 10	7 × 2 = 14	9 × 2 = 18
3 × 3 = 9	5 × 3 = 15	7 × 3 = 21	9 × 3 = 27
3 × 4 = 12	5 × 4 = 20	7 × 4 = 28	9 × 4 = 36
3 × 5 = 15	5 × 5 = 25	7 × 5 = 35	9 × 5 = 45
3 × 6 = 18	5 × 6 = 30	7 × 6 = 42	9 × 6 = 54
3 × 7 = 21	5 × 7 = 35	7 × 7 = 49	9 × 7 = 63
3 × 8 = 24	5 × 8 = 40	7 × 8 = 56	9 × 8 = 72
3 × 9 = 27	5 × 9 = 45	7 × 9 = 63	9 × 9 = 81

Les produits des nombres repréſentés par un ſeul chiffre, étant connus, on propoſera d'abord la multiplication d'un multiplicande repréſenté par pluſieurs chiffres par un multiplicateur qui n'a qu'un ſeul chiffre, puis la multiplication de deux nombres repréſentés chacun par pluſieurs chiffres.

PROBLÊME I.

50. *Multiplier un nombre repréſenté par pluſieurs chiffres par un autre nombre repréſenté par un ſeul chiffre.*

SOLUTION.

Le multiplicande étant repréſenté par pluſieurs chiffres, c'eſt-à-dire, étant compoſé d'unités, de dizaines, de centaines (11, 12.), &c. il eſt évident qu'on l'aura répété autant de fois qu'il eſt déſigné par le chiffre du multiplicateur, ſi on répete ſucceſſivement ſes unités, ſes dizaines, ſes centaines, &c. autant de fois qu'il eſt marqué par le chiffre du multiplicateur. Ainſi, pour déterminer le produit d'un nombre repréſenté par tant de chiffres que l'on voudra, multiplié par un nombre repréſenté par un ſeul chiffre, on propoſera la regle ſuivante.

On écrira le chiffre du multiplicateur ſous le multiplicande, & l'on tirera une barre ſous ces deux nombres, pour les ſéparer du produit qui doit être écrit au deſſous.

On multipliera enſuite chaque chiffre du multiplicande par le chiffre du multiplicateur, en commençant par le chiffre des unités, & en allant de ſuite aux autres.

Dans ces multiplications particulieres il peut arriver deux cas; ou le produit pourra être exprimé par un ſeul chiffre, alors on l'écrira au deſſous de la barre, dans le rang du chiffre multiplié, ou le produit ne pourra être exprimé que par deux chiffres, alors on écrira le premier à droite au deſſous de la barre, dans le rang du chiffre multiplié, & l'on retiendra l'autre pour l'ajouter au produit ſuivant.

Que s'il ſe trouve un zero dans quelque rang du multiplicande, comme la multiplication de zero ne produit que zero, on écrira au deſſous de la barre, dans le rang du multiplicande, où ſe trouve zero, le chiffre retenu du produit précédent, ſi l'on en a retenu un, ſinon on écrira zero à cette place.

Lorſque tous les chiffres du multiplicande ſeront multipliés, le nombre qui ſe trouvera au deſſous de la barre ſera le produit cherché.

EXEMPLE I.

Multiplier le nombre 40562 par le nombre 3.

OPÉRATION.

Les nombres étant ainſi diſpoſés, & ayant tiré une barre au deſſous, { 40562, multiplicande. / 3, multiplicateur.

on déterminera le produit 121686, produit.

En opérant comme il ſuit.

1°. On multipliera les deux unités du multiplicande par le multiplicateur 3, en diſant, trois fois 2 font ſix; & comme ce produit peut être exprimé par le ſeul chiffre 6, on l'écrira ſous la barre, dans le rang du chiffre 2.

2°. On multipliera les 6 dizaines du multiplicande par le multiplicateur 3, en diſant, 3 fois 6 font dix-huit; & comme ce produit dix-huit ne peut être exprimé que par deux chiffres 18, dont le premier à droite exprime 8 dizaines, & le ſecond exprime une dizaine de dizaine ou une centaine, on écrira 8 au deſſous du chiffre multiplié 6, c'eſt-à-dire, au rang des dizaines, & on retiendra 1 pour l'ajouter au produit des centaines.

3°. On multipliera les 5 centaines du multiplicande par le multiplicateur 3, en diſant, 3 fois 5 font 15; on ajoutera à ce produit la centaine que l'on a retenue du produit précédent, ce qui fera 16 centaines ou 1 mille & 6 centaines; on écrira le ſecond chiffre 6 ſous le chiffre multiplié 5, c'eſt-à-dire, au rang des centaines, & l'on retiendra 1 pour l'ajouter au produit ſuivant.

4°. On paſſera au rang ſuivant, qui eſt celui des unités de mille : comme il eſt occupé par un zero, il n'y a rien à multiplier. C'eſt pourquoi on écriroit au produit zero, ſi l'on n'avoit rien retenu du produit précédent ; mais comme on a retenu 1 mille, on écrira 1 au rang des unités de mille.

5°. Enfin on multipliera les 4 dizaines de mille du multiplicande par le multiplicateur 3, en diſant, 3 fois 4 font 12, c'eſt-à-dire, 2 dizaines de mille, & une centaine de mille.

On écrira le chiffre 2 au rang des dizaines de mille ; & comme tous les chiffres du multiplicande ſont multipliés, on écrira une centaine de mille à la gauche du chiffre 2.

Toutes les multiplications donneront 121686 pour produit total.

EXEMPLE II.

Multiplier le nombre 560 par le nombre 2.

OPÉRATION.

Les nombres propoſés étant ainſi écrits, $\left\{\begin{array}{r} 560 \\ 2 \\ \hline \end{array}\right.$

on trouvera le produit. . . . . 1120.

En opérant comme il ſuit.

1°. Le rang des unités étant occupé par un zero dans le multiplicande, il n'y aura point d'unités ſimples au produit, ce que l'on marquera en écrivant zero au deſſous de la barre, pour remplir le rang des unités du produit.

2°. On multipliera les 6 dizaines du multiplicande par le multiplicateur 2, en diſant, 2 fois 6 font 12, c'eſt-à-dire, 12 dizaines ou deux dizaines & 1 centaine : on écrira 2 au rang des dizaines, & l'on

OPÉRATION.

Les nombres étant ainſi diſpoſés, { 354, multiplicande. 125, multiplicateur.

1770, premier produit.
708. ſecond produit.
354.. troiſieme produit.

l'on trouvera. . . . . 44250, produit total.

En opérant comme il ſuit.

1°. On multipliera, comme on l'a preſcrit dans la ſolution du problême (n° 50.), tout le multiplicande 354 par les 5 unités du multiplicateur, ce qui produira 1770.

On écrira le chiffre de ce produit au deſſous de la barre, à meſure qu'on les trouvera, enſorte que ſon premier caractere à droite ſoit placé ſous le chiffre 4 des unités du multiplicateur.

2°. On multipliera tout le multiplicande 354 par les 2 dizaines du multiplicateur, ce qui produira le nombre 708, dont on écrira les chiffres à meſure qu'on les trouvera au deſſous du premier produit, de façon que ſon caractere 8, le premier à droite, réponde aux dizaines du multiplicateur, parce qu'il exprime des dizaines.

3°. On multipliera tout le multiplicande 354 par le chiffre 1 des centaines du multiplicateur, ce qui produira 354; on écrira les chiffres de ce troiſieme produit au deſſous du ſecond, de façon que ſon chiffre 4, le premier à droite, réponde au rang des centaines du multiplicateur, parce qu'il exprime des centaines.

4°. Les produits particuliers étant faits & diſpoſés ainſi qu'on l'a dit, on les ajoûtera enſemble, ſelon les regles de l'addition ſimple (n° 40.), & l'on trouvera 44250 pour le produit de 354 par 125.

EXEMPLE II.

Multiplier par. . . . . { 4523, multiplicande. 204, multiplicateur.

18092, premier produit.
9046.. ſecond produit.

922692, produit total.

Le multiplicateur n'étant compoſé que de deux chiffres ſignificatifs, ſçavoir, 4 unités & 2 centaines, il n'y a que deux multiplications à faire.

1°. On multipliera le multiplicande 4523 par le chiffre 4 des unités du multiplicateur, ce qui produira 18092.

2°. On multipliera le multiplicande 4523 par le chiffre 2 du multiplicateur, ce qui produira 9046; & comme le chiffre 2 du multiplicateur exprime des centaines, on écrira ce ſecond produit de façon que ſon chiffre 6, le premier à droite, réponde au rang des 2 centaines du multiplicateur.

3°. Enfin l'on ajoûtera enſemble les deux produits que l'on vient de trouver, & l'on aura le nombre 922692 pour le produit de 4523 par 204.

Maniere de faire la Multiplication en certains cas.

52. 1°. Lorſque le multiplicateur ſera compoſé de chiffres ſignificatifs, & d'un ou de pluſieurs zeros qui le termineront vers la droite, on pourra abréger la multiplication, en multipliant le multiplicande ſeulement par les chiffres poſitifs du multiplicateur, & en mettant à la fin du produit les zeros qui terminent le multiplicateur.

Par exemple, étant donné le nombre 2324
à multiplier par. 2400

9296..
4648

5577600.

Ayant fait le produit 55776 du multiplicande par la partie ſignificative 24 du multiplicateur, on écrira à la ſuite de ce produit les deux zeros qui ſont dans le multiplicateur, à la droite de toute la partie ſignificative; & le nombre 5577600 ſera le produit total de 2324 par 2400.

Pour concevoir la raiſon de cette multiplication abrégée, on conſidérera que le multiplicateur 2400 eſt évidemment cent fois plus grand que le multiplicateur 24 : ainſi le multiplicande reſtant le même, le produit par 2400 ſera 100 fois plus grand que le produit 55776, que l'on a trouvé en multipliant par 24 (n° 46.). Or on rendra le produit 55776 cent fois plus grand, en écrivant à ſa droite deux zeros (n° 14.). En cette ſorte 5577600.

2°. Lorſque le multiplicande ſera compoſé de chiffres ſignificatifs, & d'un ou de pluſieurs zeros à la droite de la partie ſignificative, on pourra abréger la multiplication, en multipliant ſeulement la partie ſignificative du multiplicande par le multiplicateur, & en mettant à la ſuite de ce produit les zeros qui ſont à la droite de la partie ſignificative du multiplicande.

Par exemple, étant donné le nombre 2300
à multiplier par. 24

9200
46...

55200.

On fera le produit 552 de la partie ſignificative 23 du multiplicande par le multiplicateur 24, & on écrira à la ſuite de ce produit les deux zeros qui ſont après la partie ſignificative du multiplicande, & le nombre 55200 ſera le produit de 2300 par 24; car le multiplicande 2300 étant cent fois plus grand que le multiplicande 23, le multiplicateur 24 reſtant le même, le produit fait de la multiplication de 2300 ſera cent fois plus grand que le produit 552 fait de la multiplication de 23 (n° 46.).

Or on rendra le produit 552 cent fois plus grand, en écrivant à ſa droite les deux zeros qui ſe trouvent dans le multiplicande, après la partie ſignificative 23, ce qui donnera 55200.

3°. Lorſque le multiplicande & le multiplicateur ſeront compoſés de chiffres ſignificatifs & de zeros à la droite de ces parties ſignificatives, on pourra abréger la multiplication, en multipliant ſeulement les chiffres ſignificatifs du multiplicande par les chiffres ſignificatifs du multiplicateur, & en écrivant à la ſuite du produit les zeros qui ſont dans le multiplicande & dans le multiplicateur, à la droite de leurs parties ſignificatives.

Par exemple, étant donné le nombre 23000
à multiplier par. 2400

92.....
46....

55200000.

Ayant fait le produit de la partie ſignificative 23 du multiplicande par la partie ſignificative 24 du multiplicateur, on écrira à la droite du produit 552 les trois zeros du multiplicande, & enſuite les deux zeros du multiplicateur, ce qui donnera 55200000 pour le produit de 23000 par 2400.

Cette multiplication abrégée n'eſt évidemment que la réunion des deux précédentes.

4°. Il eſt égal de multiplier un nombre ſucceſſivement par pluſieurs multiplicateurs ou par le produit de ces multiplicateurs.

Par exemple, étant donné le nombre 8 à multiplier par 4 & par 3, on aura également 96, en faiſant les multiplications ſucceſſives, ou en multipliant tout d'un coup par le produit 12 des multiplicateurs 3, 4; car $8 \times 4 = 32$, & $32 \times 3 = 96$. On a de même $8 \times 12 = 96$.

Pour voir que cela doit être, on conſidérera que lorſqu'on multiplie un nombre, par exemple, par deux multiplicateurs ſucceſſivement, c'eſt multiplier ce nombre par le premier multiplicateur, puis multiplier le produit par le ſecond multiplicateur. Or, en multipliant le nombre donné par le produit des multiplicateurs, c'eſt de même multiplier par le ſecond multiplicateur le produit qui réſulteroit en multipliant d'abord le nombre donné par le premier multiplicateur (n° 46.).

Uſage de la Multiplication.

53. On ſe ſert de la multiplication pour réduire un nombre donné à de plus petites unités de la même eſpece, ce qui s'exécute en multipliant le nombre donné par celui qui marque combien l'unité du nombre donné vaut de petites unités demandées.

Par exemple, pour réduire en livres un nombre de louis de 24 livres chacun, on le multipliera par 24.

Et comme la livre vaut 20 ſols, on réduira un nombre de livres en ſols, en le multipliant par 20.

En général on ſe ſert de la multiplication pour trouver la ſomme qui répond à pluſieurs unités, connoiſſant le nombre qui répond à l'une de ces unités.

Connoiſſant, par exemple, qu'une perſonne dépenſe par jour 518 livres, on déterminera la dépenſe qu'elle fait l'année commune de 365 jours, en multipliant la dépenſe 518 livres d'un jour par le nombre 365 jours de l'année.

EXEMPLE I.

Déterminer combien 3450 louis de 24 livres chacun font de livres.

OPÉRATION.

On multipliera	3450
par.	24
	13800
	6900
& le nombre	82800 liv.

ſera la valeur en livres de 3450 louis.

EXEMPLE II.

Déterminer combien 356 muids ſont de boiſſeaux, en ſuppoſant que le muid contient 12 ſetiers, & chaque ſetier, 24 boiſſeaux.

OPÉRATION.

On multipliera 356 par 12 pour déterminer le nombre des ſetiers contenus dans 356 muids.

356, multiplicande.
12, multiplicateur.

712,
356,

4272, produit total.

Cette premiere multiplication ayant fait connoître que 356 muids contiennent 4272 ſetiers, on multipliera le produit par 24, parce que l'on ſuppoſe que chaque ſetier vaut 24 boiſſeaux.

4272, multiplicande.
24, multiplicateur.

17088,
8544,

102528, produit total.

Et cette derniere multiplication fera connoître que 356 muids ou 4272 ſetiers valent 102528 boiſſeaux.

Ce que l'on auroit auſſi trouvé, en multipliant tout d'un coup 356 muids par le produit 288 des multiplicateurs 12 & 24.

EXEMPLE III.

Déterminer ce qu'une province compoſée de 86000 habitans donne à l'état, en ſuppoſant que ces habitans donnent chacun 34 livres, l'un portant l'autre.

OPÉRATION.

On multipliera	34 liv.
par le nombre.	86000
	204000
	272
	2924000 liv.

Ce qui fait connoître que cette province donne à l'état 2924000 livres.

ARTICLE V.

Diviſion des Nombres ſimples.

DEFINITION.

Diviſer un nombre ſimple par un autre nombre ſimple, c'eſt chercher combien de fois le ſecond eſt contenu dans le premier.

Le nombre que l'on diviſe ſe nomme *dividende*; celui par lequel on diviſe ſe nomme *diviſeur*, & le nombre qui réſulte de la diviſion ſe nomme *quotient*.

Par exemple, ſi on propoſe de connoître combien de fois 3 eſt contenu dans 66, l'opération que l'on fera pour le déterminer ſe nomme *diviſion*. Le nombre 66, que l'on propoſe de diviſer, ſe nomme *dividende*; le nombre 3, par lequel on propoſe de diviſer, eſt le *diviſeur*; enfin le nombre 22, qui réſultera de la diviſion, & qui exprime combien de fois 3 eſt contenu dans 66, eſt le *quotient* de cette diviſion propoſée.

Cette définition de la diviſion ſuffira ſeule pour établir la vérité des propoſitions ſuivantes, dans leſquelles le dividende, le diviſeur & le quotient ſont conſidérés comme des nombres abſolus, à moins qu'on n'avertiſſe du contraire.

PROPOSITION I.

54. *Le produit fait de la multiplication du diviſeur par le quotient eſt égal au dividende.*

Le diviſeur étant contenu dans le dividende autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, il eſt évident qu'en multipliant le diviſeur par le quotient, le produit doit être égal au dividende.

Et comme dans la multiplication de deux nombres le produit renferme l'un de ſes produiſans, lequel on voudra, autant de fois qu'il eſt déſigné par l'autre, il eſt évident que le dividende renferme auſſi le quotient autant de fois qu'il y d'unités dans le diviſeur, puiſqu'on vient de voir que le dividende eſt un produit, dont les deux produiſans ſont le diviſeur & le quotient.

Ainſi on pourra définir la diviſion de toutes les façons ſuivantes.

55. 1°. *Diviſer* un nombre par un autre, c'eſt chercher combien de fois le ſecond eſt contenu dans le premier.

Cette définition a lieu lorſque le diviſeur eſt de la même eſpece que le dividende, comme ſi l'on propoſoit de connoître combien de fois 16 toiſes ſont contenues dans 48 toiſes : alors le quotient eſt un nombre abſolu, qui déſigne une certaine quantité de fois.

2°. *Diviſer* un nombre par un autre, c'eſt chercher un troiſieme nombre qui ſoit contenu dans le dividende autant de fois qu'il eſt marqué par le diviſeur, ou qui ſoit une certaine partie du dividende, exprimée

exprimée par le diviſeur, ou enfin ce qui eſt la même choſe, c'eſt partager le dividende en autant de parties égales, qu'il y a d'unités dans le diviſeur; & cette définition a lieu lorſque le dividende étant concret, le diviſeur eſt un nombre abſolu.

Par exemple, lorſque l'on propoſe de diviſer 48 toiſes par 4, on demande un nombre de toiſes, qui ſoit la quatrieme partie de 48 toiſes: le quotient eſt donc alors un nombre concret, de même eſpece que le dividende.

3°. *Diviſer*, c'eſt dans un produit propoſé, l'un de ſes produiſans étant donné, trouver l'autre produiſant: le produit donné, c'eſt le dividende; le produiſant connu, c'eſt le diviſeur, & le produiſant cherché, c'eſt le quotient.

Et l'on remarquera que lorſque le dividende eſt un nombre concret, & le diviſeur un nombre abſolu, le quotient étant alors un nombre concret, de même eſpece que le dividende, il doit être regardé comme multiplicande dans le produit repréſenté par le dividende, & le diviſeur en ſera le multiplicateur.

Et lorſque le dividende & le diviſeur ſont des nombres concrets, de la même eſpece, comme le quotient eſt alors un nombre abſolu, il doit être regardé comme le multiplicateur dans le produit repréſenté par le dividende, & le diviſeur en ſera le multiplicande.

PROPOSITION II.

56. *Si l'on multiplie le dividende d'une diviſion par un nombre quelconque, le diviſeur reſtant le même, le quotient du nouveau dividende ſera égal au premier quotient multiplié par le même nombre qui aura multiplié le dividende.*

Par exemple, dans la diviſion de 18 *par* 6, *dont le*

quotient eſt 3, ſi l'on multiplie le dividende 18 par 2, le diviſeur 6 reſtant le même, on aura la nouvelle diviſion de 36 par 6, dont le quotient 6 eſt égal au premier quotient 3, multiplié par le nombre 2, qui a multiplié le dividende.

Pour concevoir pourquoi cela doit être, on conſidérera que le quotient de la diviſion eſt le nombre de fois que le dividende contient le diviſeur. Or le dividende devenant double ou triple, ou décuple ou centuple, &c. de ce qu'il étoit, il doit contenir le même diviſeur deux fois, trois fois, dix fois, cent fois, &c. autant que le dividende ſimple le contenoit.

PROPOSITION III.

57. *Si l'on multiplie le diviſeur d'une diviſion par un nombre quelconque, le dividende reſtant le même, le quotient de la diviſion par ce nouveau diviſeur ſera égal au quotient de la premiere, diviſé par le même nombre qui aura multiplié le diviſeur.*

Par exemple, dans la diviſion de 36 par 6, dont le quotient eſt 6, ſi l'on multiplie le diviſeur 6 par 3, on aura la nouvelle diviſion de 36 par 18, dont le quotient 2 eſt égal au premier quotient 6, diviſé par le nombre 3, qui a multiplié le diviſeur.

Pour concevoir pourquoi cela doit être ainſi dans cet exemple & dans tous les cas poſſibles, on conſidérera que le diviſeur devenu double ou triple, ou décuple ou centuple, &c. doit être contenu 2 fois, 3 fois, 10 fois ou 100 fois moins dans un dividende conſtant, que le diviſeur ſimple.

58. *On conclura des propoſitions* (56. 57.) *que ſi l'on multiplie le dividende & le diviſeur d'une diviſion par un même nombre, le quotient de la diviſion du dividende & du diviſeur multipliés, ſera égal au quotient*

que l'on auroit en diviſant le dividende non multiplié, par le diviſeur non multiplié.

Car en multipliant le dividende & le diviſeur par un même nombre, le quotient eſt à la fois multiplié (n° 56.), & diviſé (n° 57.) par ce même nombre, ce qui ne le change point.

PROPOSITION. IV.

59. *Si l'on diviſe le dividende d'une diviſion par un nombre quelconque, le diviſeur reſtant le même, le quotient de ce nouveau dividende ſera égal au quotient de la première diviſion, diviſé par le même nombre qui aura diviſé le dividende.*

Par exemple, dans la diviſion de 36 par 6, dont le quotient eſt 6, ſi l'on diviſe le dividende 36 par le nombre 2, on aura la nouvelle diviſion de 18 par 6, dont le quotient 3 eſt égal au premier quotient 6, diviſé par le nombre 2, qui a diviſé le dividende 36.

Pour concevoir pourquoi cela doit être dans tous les cas, on conſidérera qu'un dividende devenu 2 fois ou 3 fois, ou 10 fois ou 100 fois, &c. plus petit, doit contenir 2 fois, 3 fois, 10 fois, 100 fois moins le même diviſeur.

PROPOSITION V.

60. *Si l'on diviſe le diviſeur d'une diviſion par un nombre quelconque, le dividende reſtant le même, le quotient de la diviſion par le nouveau diviſeur ſera égal au quotient de la première, multiplié par le nombre qui aura diviſé le diviſeur.*

Par exemple, dans la diviſion de 36 par 6, dont le quotient eſt 6, ſi on diviſe le diviſeur 6 par le nombre 3, on aura la nouvelle diviſion de 36 par 2, dont le quotient 18 eſt égal au premier quotient 6, multiplié par le nombre 3, qui a diviſé le diviſeur.

Pour concevoir pourquoi cela doit être dans tous les cas, on conſidérera qu'un diviſeur devenu 2 fois ou 3 fois, ou 10 fois ou 100 fois, &c. plus petit, doit être contenu 2 fois ou 3 fois, ou 10 fois ou 100 fois, &c. plus dans le même dividende.

61. *On conclura des propoſitions* (n° 59. 60.) *que ſi l'on diviſe par un même nombre le dividende & le diviſeur d'une diviſion, le quotient de la nouvelle diviſion ſera le même que celui de la premiere.*

Car en diviſant le dividende & le diviſeur par un même nombre, le quotient eſt à la fois diviſé (59.), & multiplié (n° 60.) par ce même nombre, ce qui ne le change point.

PROBLÊME I.

62. *Diviſer un nombre exprimé par pluſieurs chiffres, par un nombre repréſenté par un ſeul chiffre.*

SOLUTION.

On écrira le diviſeur à la droite du dividende; & les ayant ſéparé par un crochet, on tirera une barre au deſſous du diviſeur, pour le ſéparer du quotient, qu'on écrira au deſſous de lui.

On diviſera toutes les parties du dividende, en commençant par la gauche, c'eſt-à-dire que, ſi le dividende eſt compoſé de mille, de centaines, de dizaines & d'unités, on cherchera d'abord combien de fois le diviſeur eſt contenu dans les mille du dividende, ou combien de fois il peut en être retranché. On réduira en centaines la partie des mille que l'on n'aura pu diviſer; & les ayant joint aux centaines ſuivantes, dans le dividende, on diviſera cette ſomme de centaines par le diviſeur. On réduira en dizaines les parties des centaines que l'on n'aura pu diviſer; & les ayant joint aux dizaines du dividende,

on diviſera cette ſomme de dizaines par le diviſeur. Enfin on réduira en unités ſimples la partie des dizaines que l'on n'aura pu diviſer ; & les ayant joint aux unités ſimples du dividende, on diviſera cette ſomme d'unités ſimples par le diviſeur.

Ayant ainſi diviſé toutes les parties du dividende, & ayant mis un chiffre au deſſous du diviſeur pour chacune de ces diviſions, le nombre qui ſe trouvera écrit ſous le diviſeur ſera le quotient cherché.

EXEMPLE I.

Diviſer le nombre 7968 par le nombre 3.

OPERATION.

	Dividende.	
Le dividende & le diviſeur étant ainſi diſpoſés	7968	3, diviſeur.
	6	2, quotient.
	1	

1°. On commencera par diviſer les 7 mille du dividende par le diviſeur 3, en diſant, en 7 combien de fois 3 ? 2 fois & plus : on écrira au quotient le chiffre 2, qui exprime évidemment des mille.

Pour déterminer la partie de 7, qui contient deux fois le diviſeur 3, & la partie de ce 7 que l'on n'a pu diviſer, on multipliera le diviſeur 3 par le quotient 2, ce qui produira 6, que l'on écrira au deſſous de 7 mille que l'on vient de diviſer : on retranchera 6 de 7, & il reſtera 1, que l'on écrira ſous le 6.

2°. Ayant abaiſſé à la droite du reſte 1 les 9 centaines du dividende, ce qui fera 19 centaines.

Dividende 7968 { 3, diviſeur. / 26, quotient.

6

19

18

1

On diviſera par 3 les 19 centaines, en diſant, en 19 combien de fois 3 ? 6 fois & plus : on écrira au quotient, à la droite de 2, ce chiffre 6, qui exprime évidemment des centaines.

Pour déterminer, & la partie de 19, qui contient 6 fois le diviſeur 3, & ſa partie qui n'a pas été diviſée, on multipliera le diviſeur 3 par le quotient 6, ce qui produira 18, que l'on écrira au deſſous des 19 centaines que l'on vient de diviſer : on retranchera 18 de 19, & il reſtera 1 centaine.

3°. Ayant abaiſſé à la droite du reſte 1 centaine, les 6 dizaines du dividende, ce qui fera 16 dizaines.

Dividende 7968 { 3, diviſeur. / 265, quotient.

6

19

18

16

15

1

On diviſera par 3 ces 16 dizaines, en diſant, en 16 combien de fois 3 ? 5 fois & plus, & on écrira au quotient, à la droite du chiffre 6, le chiffre 5, qui exprime évidemment des dizaines.

Pour déterminer la partie de 16, qui contient le diviſeur 3 cinq fois, & ſa partie qui n'a pas été diviſée, on multipliera le diviſeur 3 par 5, ce qui produira 15, que l'on écrira au deſſous de 16 dizaines que

l'on vient de diviſer : on retranchera 15 de 16, & il reſtera 1 dizaine.

4°. Ayant abaiſſé à la droite du reſte 1 dizaine les 8 unités ſimples du dividende, ce qui fera 18 unités ſimples.

Dividende 7968 { 3, diviſeur. / 2656, quotient.

6

19
18

16
15

18
18

0

On diviſera par le diviſeur 3 ces 18 unités, en diſant, en 18 combien de fois 3 ? 6 fois, & l'on écrira à la droite du chiffre 5 le chiffre 6, qui exprime évidemment des unités ſimples.

Pour s'aſſurer ſi cette derniere diviſion eſt ſans reſte, on multipliera le diviſeur 3 par le quotient 6, ce qui produira 18 : on retranchera 18 de la derniere partie 18 du dividende, ſur laquelle on vient d'opérer; & comme il ne reſtera rien, on conclura que le diviſeur 3 eſt contenu dans le dividende 7968 exactement le nombre de fois exprimé par tout le nombre 2656, écrit au deſſous du diviſeur, c'eſt-à-dire qu'il y eſt contenu 2656 fois; à ſçavoir, 2 mille fois, à cauſe du quotient 2, qui vient de la diviſion des mille; plus, 6 cent fois, à cauſe du quotient 6, qui vient de la diviſion des centaines; plus, 5 dizaines de fois, à cauſe du quotient 5, qui eſt venu de la diviſion des dizaines; plus, 6 unités de fois, à cauſe du quotient 6, qui eſt venu de la diviſion des unités ſimples.

EXEMPLE II.

Diviſer le nombre 3658 par le nombre 6.

OPÉRATION.

Dividende.

Le dividende & le diviſeur étant ainſi diſpoſés $\begin{matrix} 3658 \\ \underline{36} \\ 0 \end{matrix}$ $\left\{\begin{matrix} 6, \text{ diviſeur.} \\ \overline{6}, \text{ quotient.} \end{matrix}\right.$

1°. Le premier chiffre 3 du dividende ne renfermant pas le diviſeur 6, on cherchera combien de fois le diviſeur eſt contenu dans la partie 36 du dividende, compoſée de deux chiffres, & laquelle exprime 36 centaines, & l'on dira, en 36 combien de fois 6? 6 fois: on écrira ce 6 au quotient, au rang des centaines, parce qu'il exprime évidemment 6 centaines.

Pour déterminer le reſte de cette premiere diviſion, s'il y en a, on multipliera le diviſeur 6 par le quotient 6, ce qui produira 36: on retranchera 36 de 36, & il reſtera zero.

2°. Ayant abaiſſé les 5 dizaines du dividende à la droite du zero reſtant.

Dividende $\begin{matrix} 3658 \\ \underline{36} \\ 05 \end{matrix}$ $\left\{\begin{matrix} 6, \text{ diviſeur.} \\ \overline{60}, \text{ quotient.} \end{matrix}\right.$

On dira, en 5 combien de fois 6? & comme 5 ne renferme pas 6 même une fois en entier, on mettra au quotient un zero à la droite de 6, pour marquer que le quotient ne renferme point de dizaines, ou que le diviſeur n'eſt point contenu dans les dizaines du dividende, & en même tems pour conſerver au chiffre 6 des centaines du quotient ſon rang de va-

leur ; & les 5 dizaines du dividende n'ayant pas été diviſées, ſeront retenues pour être diviſées avec les unités ſimples.

3°. On écrira à la droite des 5 dizaines abaiſſées les 8 unités ſimples du dividende, ce qui fera 58 unités.

Dividende 3658 { 6, diviſeur.
36 { 609 + 4/6, quotient.
058
54
reſte 4

On diviſera les 58 unités, en diſant, en 58 combien de fois 6? 9 fois & plus : on écrira 9 au quotient, au rang des unités.

Pour déterminer le reſte de la diviſion, on multipliera le diviſeur 6 par le quotient 9, ce qui produira 54, que l'on écrira au deſſous de 58 : on retranchera 54 de 58 ; il reſtera 4, que l'on écrira à côté de la partie 609 du quotient, ſous l'expreſſion d'une fraction qui a ce reſte 4 pour numérateur, & le diviſeur 6 pour dénominateur.

La diviſion étant ainſi achevée, le quotient 609 + 4/6 fera connoître que 6 eſt contenu dans le dividende 3658, 609 fois, & qu'il reſte 4 à diviſer par 6.

PROBLÊME II.

63. *Diviſer un nombre repréſenté par pluſieurs chiffres par un autre nombre auſſi repréſenté par pluſieurs chiffres.*

SOLUTION.

Lorſque le diviſeur eſt exprimé par pluſieurs chiffres, la diviſion ſe fait de la même maniere que lorſqu'il eſt repréſenté par un ſeul chiffre.

L'on diviſe ſucceſſivement toutes les parties du dividende, en allant de gauche à droite; on prend pour la premiere diviſion autant de chiffres du dividende qu'il en faut pour contenir le diviſeur; puis on diviſe, on multiplie & l'on ſouſtrait.

On prend pour la ſeconde diviſion le reſte de la premiere, avec le chiffre qui ſuit dans le dividende la partie que l'on a priſe pour la premiere diviſion, & l'on fait encore la diviſion, la multiplication & la ſouſtraction.

On prend de même pour chaque autre diviſion le reſte de la diviſion précédente, avec le chiffre ſuivant du dividende, & l'on diviſe, l'on multiplie & l'on ſouſtrait.

EXEMPLE I.

Diviſer le nombre 3253 par le nombre 84.

OPÉRATION.

Dividende.

Les nombres étant ainſi diſpoſés : 3253 | 84, diviſeur. — 252 | 3, quotient. — 73

1°. L'on prendra dans le dividende la partie 325 pour premier dividende, parce que le diviſeur 84 n'eſt pas contenu dans les deux premiers chiffres 32; & comme il ſeroit difficile de trouver tout de ſuite combien de fois le diviſeur 84 eſt contenu dans 325, on diviſera les 32 dizaines de cette partie 325 par les 8 dizaines du diviſeur, en diſant, en 32 combien de fois 8? On trouvera qu'il y eſt contenu 4 fois.

On ne mettra pas d'abord ce chiffre 4 au quotient, parce que l'on n'eſt pas ſûr que tout le diviſeur 84 ſoit auſſi renfermé 4 fois dans la partie 325 du divi-

dende, ſur laquelle on opere; mais on éprouvera auparavant ce chiffre 4, en multipliant à part le diviſeur 84 par 4, pour voir ſi le produit peut être retranché de la partie 325 que l'on diviſe. Si ce produit ſe trouve plus grand que 325, on diminuera le chiffre 4 continuellement de l'unité, juſqu'à ce que l'on parvienne à un quotient qui, multipliant le diviſeur 84, donne un produit qui puiſſe être retranché de la partie du dividende, ſur laquelle on opere; & cette épreuve ſe fera de même dans toutes les autres diviſions particulieres pour chaque chiffre que l'on mettra au quotient.

En faiſant l'opération, c'eſt-à-dire, en multipliant à part le diviſeur 84 par le quotient 4 de la diviſion de 32 par 8, on trouve le produit 336 plus grand que la partie 325 du dividende. On prendra donc 3 au lieu de 4; on multipliera 84 par 3, ce qui produiſant le nombre 252, qui peut être retranché de 325, on écrira au quotient le chiffre 3, qui exprime évidemment des dizaines.

Le produit 252 étant écrit ſous la partie 325, que l'on vient de diviſer, on retranchera 252 de 325, & il reſtera 73 dizaines.

2°. On abaiſſera à la droite du reſte 73 les 3 unités ſimples du dividende, ce qui fera 733 unités ſimples pour un ſecond dividende, à diviſer par 84.

Dividende	3253	84, diviſeur.	
	252	$38+\frac{61}{84}$, quotient.	
Second dividende	733		
	672		
reſte	61		

Comme il y a un chiffre de plus dans le nouveau dividende 733 que dans le diviſeur 84, le chiffre 8

du diviſeur répondra à la partie 73 du ſecond dividende, & l'on dira, en 73 combien de fois 8 ? On trouvera qu'il y a 9 fois & plus.

On éprouvera ce chiffre 9, en multipliant le diviſeur 84 par 9 ; & comme le produit 756, qui viendra, eſt plus grand que le ſecond dividende 733, on prendra 8 au lieu de 9 ; on multipliera 84 par 8, ce qui donnant 672, qui peut être retranché du ſecond dividende 733, on écrira au quotient le chiffre 8, qui exprime évidemment des unités ſimples.

Le produit 672 étant écrit ſous le ſecond dividende 733, on retranchera 672 de 733, & il reſtera 61, que l'on écrira à côté de la partie 38 du quotient, ſous l'expreſſion $\frac{61}{84}$, & le quotient $38 + \frac{61}{84}$ fera connoître que le diviſeur 84 eſt contenu dans le dividende 3253 38 fois, & qu'il reſte 61 unités à diviſer par 84.

EXEMPLE II.

Diviſer le nombre 4564103 par le nombre 984.

OPÉRATION.

Dividende.

Le dividende & le diviſeur étant ainſi diſpoſés : 4564103 | 984, diviſeur. / 3936 | 4, quotient. / 628

1°. Comme les trois premiers chiffres à gauche, dans le dividende, font un nombre moindre que le diviſeur 984, on prendra pour premier dividende la partie 4564, compoſée de 4 chiffres, laquelle exprime des mille, & donnera par conſéquent au quotient un chiffre qui repréſentera des mille.

Le premier dividende 4564 renfermant ainſi un chiffre de plus que le diviſeur 984, le chiffre 9 de ce dernier répondra à la partie 45 du premier di-

vidende, & l'on dira, en 45 combien de fois 9? On trouvera qu'il y eſt 5 fois; mais comme, en multipliant 984 par 5, on trouve le nombre 4720 plus grand que le premier dividende 4564, on prendra 4 au lieu de 5, & l'on multipliera 984 par 4, ce qui donnera le nombre 3936, qui peut être retranché de 4564. Ainſi on écrira au quotient le chiffre 4, qui exprime des mille.

Le produit 3936 étant écrit au deſſous du premier dividende 4564, on retranchera 3936 de 4564, & il reſtera 628 mille.

2°. On abaiſſera à la droite du reſte 628 le chiffre 1 des centaines du dividende, ce qui fera 6281 centaines pour un nouveau dividende, à diviſer par 984, dont le quotient ſera évidemment un chiffre de centaines.

Dividende	4564103	984, diviſeur.
	3936	46, quotient.
Second Dividende	6281	
	5904	
	377.	

Le nouveau dividende 6281 ayant un chiffre de plus que le diviſeur, le premier chiffre 9 de ce dernier répondra à la partie 62 de ce ſecond dividende, & l'on dira, en 62 combien de fois 9? 6 fois & plus.

On fera l'épreuve de ce chiffre 6, en multipliant lediviſeur 984 par 6, & on trouvera le produit 5904, lequel n'eſt pas plus grand que le dividende 6281, ni moindre que le dividende d'une quantité égale au diviſeur, ce qui fait connoître que le diviſeur 984 eſt contenu 6 fois dans le dividende 6281, & qu'il n'y peut être contenu 7 fois. On écrira donc 6 au quotient, au rang des centaines.

Le produit 5904 étant écrit ſous le ſecond dividende 6281, on le retranchera de ce dividende, & il reſtera 377.

3°. On abaiſſera à la droite du reſte 377 le zero des dizaines du dividende, ce qui fera 3770 dizaines pour un troiſieme dividende, à diviſer par 984, dont le quotient ſera évidemment un chiffre de dizaines.

Dividende	4564103	984, diviſeur.
	3936	463, quotient.
	6281	
	5904	
Troiſieme dividende	3770	
	2952	
	818	

Le nouveau dividende 3770 renfermant un chiffre de plus que le diviſeur 984, le premier chiffre 9 du diviſeur répondra à la partie 37 du dividende, & l'on dira, en 37 combien de fois 9? 4 fois.

On fera l'épreuve de ce chiffre 4, en multipliant le diviſeur 984 par 4, ce qui donnant le nombre 3936 plus grand que le troiſieme dividende 3770, on prendra 3 au lieu de 4, & l'on multipliera le diviſeur 984 par 3, ce qui donnera le produit 2952, qui peut être retranché de 3770. Ainſi on écrira 3 au quotient, à la droite du chiffre 6.

Le produit 2952 étant écrit ſous le dividende 3770, on retranchera 2952 de 3770, & il reſtera 818.

4°. On abaiſſera à la droite du reſte 818 les 3 unités du dividende, ce qui fera 8183 unités ſimples pour un quatrieme dividende, à diviſer par 984, dont le quotient ſera évidemment un chiffre d'unités ſimples.

Divid. propoſé	4564103	984, diviſeur.	
	3936	4638 + $\frac{311}{984}$, quotient.	
	6281		
	5904		
	3770		
	2952		
Quatrieme divid.	8183		
	7872		
Reſte	311		

Le dividende 8183 renfermant un chiffre de plus que le diviſeur 984, le premier chiffre 9 du diviſeur répondra à la partie 81 du dividende, & l'on dira, en 81 combien de fois 9? 9 fois; mais comme le produit du diviſeur 984 par le chiffre 9 eſt plus grand que le dividende 8183, on éprouvera le chiffre 8, en multipliant 984 par 8. Le produit 7872 de ces deux nombres étant plus petit que le dividende 8183, il pourra en être retranché: on écrira 8 au quotient, au rang des unités.

Ayant écrit les chiffres du produit 7872 ſous les chiffres correſpondans du dividende 8183, on retranchera le produit 7872 du dividende 8183, & il reſtera 311, que l'on écrira à côté de la partie 4638 du quotient, avec le ſigne +, & ſous l'expreſſion de la fraction $\frac{311}{984}$.

Ainſi le quotient de 4564103 par 984 eſt 4638 + $\frac{311}{984}$.

Maniere de diviſer en certains cas.

64. 1°. Lorſque le diviſeur & le dividende ſeront compoſés chacun de chiffres ſignificatifs, & de zeros à la droite de toute la partie ſignificative, on pourra

abréger la diviſion, en effaçant dans le dividende après la partie ſignificative, autant de zeros qu'il y en aura dans le diviſeur, après ſa partie ſignificative & en faiſant la diviſion de ce qui reſtera dans le dividende par la partie ſignificative du diviſeur.

Si on propoſe, par exemple,
la diviſion. . . . divid. 3690000 { 9000, diviſeur

on la changera en
celle-ci. . . . . divid. 3690 { 9, diviſeur. / 410, quotient.

en effacant dans le dividende & dans le diviſeur trois zeros, & en faiſant la diviſion des parties reſtantes.

Pour concevoir la raiſon de cette diviſion abrégée on conſidérera qu'en retranchant dans cet exemple trois zeros à la droite du dividende, & trois à la droite du diviſeur, c'eſt rendre le dividende & le diviſeur mille fois plus petit (n° 15.), ou les diviſer chacun par le même nombre 1000; or, lorſqu'on diviſe le dividende & le diviſeur, chacun par un même nombre, le quotient reſte le même (n° 61.).

2°. Lorſque le diviſeur ſera compoſé de chiffres ſignificatifs, & de zeros à la droite de ces chiffres ſignificatifs, on pourra abréger la diviſion, en retranchant dans le dividende, vers ſa droite, autant de chiffres qu'il y aura de zeros dans le diviſeur, après ſa partie ſignificative, & en diviſant ce qui reſtera dans le dividende par la partie ſignificative du diviſeur. Le reſte de cette diviſion, joint aux chiffres retranchés dans le dividende, ſera regardé comme le reſte de la diviſion que l'on eût eu, en faiſant l'opération à l'ordinaire.

Si on

Si on propoſe, par exemple,
la diviſion. . . . . divid. 36943 { 900, diviſeur.

on la changera d'abord en celle-ci. . . . . divid. 369 { 9, diviſeur. / $41 + \frac{43}{900}$, quotient.

en retranchant à la droite du dividende les deux chiffres 43, & les deux zeros qui ſont à la droite de la partie ſignificative 9 du diviſeur.

Enſuite on diviſera 369 par 9, ce qui donnera 41 pour la premiere partie du quotient, & la partie retranchée 43 ſera, ſous l'expreſſion $\frac{43}{900}$, la ſeconde partie du quotient.

Pour concevoir la raiſon de cette diviſion abrégée, on conſidérera que le dividende $36943 = 36900 + 43$. Or la diviſion de la partie 36900 par 900, ſe réduit à la diviſion de 369 par 9, dont le quotient eſt 41, & le quotient de 43 par 900 eſt indiqué par $\frac{43}{900}$. Donc le quotient de la ſomme de $36900 + 43$ ou de 36943 par 900, eſt $41 + \frac{43}{900}$.

De même ſi on propoſe
la diviſion. . . divid. 1459300 { 24000, diviſeur.

on la changera en celle-ci. . . . divid. 145 { 24, diviſeur. / $6 + \frac{19300}{24000}$, quotient.

en retranchant 4 chiffres à la droite du dividende, & les quatre zeros qui ſont à la droite de toute la partie ſignificative 24 du diviſeur.

Enſuite on diviſera la partie 145 du dividende par la partie ſignificative 24 du diviſeur, ce qui donnera 6 pour la premiere partie du quotient, avec un reſte 1 qui vaut 10000. On ajoutera ce reſte avec la partie retranchée 9300, ce qui fera le nombre 19300, dont on indiquera la diviſion par le diviſeur entier

240000 par l'expreſſion $\frac{19300}{240000}$, qui ſera la ſeconde partie du quotient cherché.

4°. Lorſqu'on propoſe de diviſer un nombre par 2 ou par 3, ou par 4, &c. on pourra faire ces diviſions, en prenant la moitié ou le tiers, ou le quart, &c. de chaque partie du nombre propoſé, en commençant par la gauche.

Par exemple, ſi on propoſe la diviſion. . . divid. 3457 $\left\{\begin{array}{l} 2, \text{ diviſeur.} \\ \hline 1728+\frac{1}{2}, \text{ quotient.} \end{array}\right.$

on dira, la moitié des 3 mille du dividende eſt 1, & il reſte 1.

L'on écrira 1 au quotient, au rang des mille.

Puis, comme il reſte 1 mille, on le joindra par la penſée avec les 4 centaines du dividende, ce qui fera 14 centaines, & l'on dira, la moitié de 14 centaines eſt 7 centaines exactement. On écrira 7 à la droite des mille au quotient.

Paſſant aux 5 dizaines du dividende, on dira, la moitié de 5 eſt 2: il reſte 1, qui vaut 1 dizaine.

On écrira 2 au quotient, à la droite des 7 centaines.

On joindra par la penſée la dizaine reſtante avec les 7 unités du dividende, ce qui fera 17, & l'on dira, la moitié de 17 eſt 8, & il reſte 1.

On écrira 8 au quotient, au rang des unités, & à côté de la partie 1728 du quotient, on écrira $+\frac{1}{2}$, pour marquer qu'il reſte 1 à diviſer par 2.

Si l'on propoſe la diviſion. . . divid. 4579 $\left\{\begin{array}{l} 3, \text{ diviſeur.} \\ \hline 1526+\frac{1}{3}, \text{ quotient.} \end{array}\right.$

on dira, le tiers de 4 mille eſt 1 mille, & il reſte 1 mille: on écrira 1 au quotient, au rang des mille. On joindra enſuite 1 mille qui reſte avec les 5 cen-

taines du dividende, ce qui fera 15 centaines, & on dira, le tiers de 15 eſt 5 exactement: on écrira donc 5 au quotient, au rang des centaines.

Paſſant au 7 dizaines du dividende, on dira, le tiers de 7 eſt 2, & il reſte 1 dizaine: on écrira 2 au rang des dizaines au quotient, à la droite des 5 centaines.

On joindra par la penſée la dizaine reſtante avec les 9 unités du dividende, ce qui fera 19, & l'on dira, le tiers de 19 eſt 6, & il reſte 1: on écrira 6 au quotient, au rang des unités, & à côté de la partie 1526 du quotient on écrira $+\frac{1}{3}$, pour marquer qu'il reſte 1 à diviſer par 3.

5°. On arrivera au même quotient, en diviſant ſucceſſivement par pluſieurs diviſeurs, ou tout d'un coup par le produit de ces diviſeurs.

Par exemple, ſi l'on diviſe 64 ſucceſſivement par les diviſeurs 16, 2, ou tout d'un coup par le produit 32 des diviſeurs, on aura également 2 pour quotient, ce que l'on vérifie en faiſant l'opération. 1°. En 64 combien de fois 16? 4 fois; & dans ce quotient 4, combien de fois le ſecond diviſeur 2? 2 fois. 2°. En 64 combien de fois le produit 32 des diviſeurs? 2 fois.

Pour ſe convaincre que cela doit être ainſi, on conſidérera qu'en diviſant un nombre ſucceſſivement, par exemple, par deux diviſeurs, c'eſt diviſer le dividende propoſé par le premier diviſeur, puis diviſer le quotient de cette premiere diviſion par le ſecond diviſeur.

Or, en diviſant tout d'un coup le dividende propoſé par le produit fait de la multiplication du premier diviſeur par le ſecond, le quotient de cette diviſion eſt égal au quotient que l'on eût eu, en diviſant d'abord par le premier diviſeur, & en diviſant

enſuite par le ſecond diviſeur le quotient de cette premiere diviſion (n° 57.).

On déduira delà une méthode fort courte de réduire des ſols en livres. Elle conſiſte à retrancher le premier caractere à droite, dans le nombre des ſols propoſés, & à prendre la moitié du reſte. Cette moitié ſera exactement la valeur en livres du nombre des ſols propoſés, ſi le caractere retranché de ce nombre eſt un zero : mais ſi ce caractere eſt un chiffre ſignificatif, il exprimera encore un nombre de ſols, qu'il faudra ajouter par le ſigne + au nombre des livres que l'on aura trouvé.

Par exemple, étant donné le nombre 28760 ſols, pour le réduire en livres, on retranchera le caractere 0, le premier à droite, & l'on prendra la moitié de la partie reſtante. Cette moitié 1438 ſera le nombre des livres contenues dans le nombre propoſé 28760.

De même étant donné le nombre 28763 ſols, on retranchera le dernier caractere 3 à droite, & l'on prendra la moitié de la partie reſtante 2876. Cette moitié 1438 ſera le nombre des livres contenues dans 28763 ; & comme le chiffre 3 retranché exprime 3 ſols, la valeur totale de 28763 ſols ſera 1438 liv. + 3 ſols.

Pour concevoir la raiſon de cette méthode, on conſidérera que, puiſque la livre vaut 20 ſols, on doit avoir le nombre des livres contenues dans un nombre de ſols propoſé, en diviſant ce nombre par 20, ou en diviſant ſucceſſivement par 10 & par 2 (n° 64.), parce que $20 = 10 \times 2$.

Or c'eſt ce que l'on a fait ; car, en retranchant le premier caractere à droite, c'eſt diviſer par 10 (n° 15.), & en prenant la moitié de la partie reſtante, c'eſt diviſer le premier quotient par 2.

On ajoutera la maniere de prendre la dixieme par-

tie d'une ſomme de livres. Elle conſiſte à retrancher le caractere, le premier à droite, dans le nombre propoſé, & à doubler le chiffre retranché. La partie reſtante dans le nombre propoſé exprimera des livres, & le double de ce chiffre retranché exprimera des ſols, & cette ſomme de livres & de ſols ſera la dixieme partie du nombre des livres propoſé.

Par exemple, ſi l'on demande la dixieme partie du nombre 56789, on retranchera le caractere 9, le premier à droite, on le doublera, ce qui donnera 18, & l'on aura 5678 liv. + 18 ſols pour la dixieme partie du nombre 56789, ce qui eſt aiſé à entendre; car le nombre 56789 = 56780 liv. + 9 liv. Or la dixieme partie de 56780 eſt 5678, en retranchant un rang à la droite de ce nombre (n° 15.), & la dixieme partie de 9 liv. eſt 18 ſols; car la dixieme partie de 1 liv. ou de 20 ſols étant 2 ſols, le dixieme d'un nombre quelconque de livres ſera le produit de 2 ſols multiplié par ce nombre de livres, c'eſt-à-dire, un nombre de ſols égal au double de ce nombre de livres.

Uſage de la Diviſion.

65. On ſe ſert de la diviſion pour réduire un nombre à des unités d'une plus grande valeur, ce qui ſe fait en diviſant le nombre propoſé par le nombre qui marque combien de fois l'unité de la valeur demandée renferme l'unité du nombre propoſé.

Par exemple, ſi on propoſe de déterminer le nombre de louis de 24 livres chacun, contenu dans un nombre de livres, on diviſera ce nombre de livres par le nombre 24, valeur du louis en livres.

Etant donné un nombre de pieds, on le réduira en toiſes, en le diviſant par 6, en ſuppoſant que la toiſe = 6 pieds.

On ſe ſert auſſi de la diviſion pour déterminer le nombre qui répond à chaque unité d'un nombre donné, lorſque l'on connoît le nombre qui répond au nombre entier donné, ou, ce qui revient au même, on ſe ſert de la diviſion pour partager un nombre donné en autant de parties égales, qu'il y a d'unités dans un ſecond nombre donné, ce qui ſe fait en diviſant le premier nombre donné par le ſecond.

Connoiſſant, par exemple, ce qu'une perſonne a à dépenſer par an, on déterminera ce qu'elle peut dépenſer par jour, en diviſant la dépenſe totale par 365, nombre des jours de l'année commune.

Exemples de Diviſions.

I.

Déterminer le nombre des louis de 24 liv. contenus dans 82800 liv.

Dividende 82800 { 24, diviſeur. / 3450, quotient.

On diviſera 82800 par 24, parce que l'on ſuppoſe le louis = 24 liv. & le quotient 3450 ſera le nombre de louis contenus dans le nombre propoſé.

II.

Déterminer le nombre de muids contenus dans 102528 boiſſeaux.

Comme le muid contient 12 ſetiers, & le ſetier 24 boiſſeaux, le muid contient un nombre de boiſſeaux, exprimé par le produit de $24 \times 12 = 288$. Ainſi on déterminera le nombre des muids contenus dans 102528 boiſſeaux, en diviſant ce nombre de boiſſeaux par 288.

Dividende 102528 { Boiſſeaux. 288, diviſeur. / Muids. 356, quotient.

Le quotient 356 fera connoître que le nombre propoſé contient 356 muids.

III.

On a donné 3896 liv. pour 322 aunes de drap : on demande le prix de l'aune.

Dividende 3896 liv. { 322, diviſeur. / 12 l. + $\frac{32}{322}$, quotient.

On diviſera le prix total 3896 par 322, le nombre des aunes, & le quotient 12 liv. + $\frac{32}{322}$ fera connoître que l'aune de drap coûte 12 liv. plus la 322e partie de 32 livres.

Maniere d'opérer ſur le reſte d'une Diviſion.

Lorſque le dividende ſera un nombre concret, & qu'il y aura un reſte après la diviſion, on pourra le réduire continuellement aux unités de moindre valeur qu'il renfermera (n° 53.), & continuer la diviſion par le même diviſeur.

Dans le troiſieme exemple ci-deſſus, où l'on a propoſé de déterminer le prix de l'aune de drap, en ſuppoſant que 322 aunes ont coûté 3896 livres, ayant trouvé, en diviſant 3896 par 322, que chaque aune coûte 12 liv. plus $\frac{32}{322}$, ce qui eſt la ſeconde partie du quotient, on multipliera le reſte 32 liv. par 20, le nombre des ſols que contient la livre, ce qui donnera 640 ſols ; on diviſera 640 ſols par 322, ce qui donnera 1 ſol pour quotient, & il reſtera 318 ſols à diviſer encore par 322.

Cette premiere opération ſur le reſte fera con-

noître que la valeur de l'aune de drap eſt 12 liv. + 1 ſ. + $\frac{318}{322}$ ſols.

A préſent, pour avoir en deniers la valeur de $\frac{318}{322}$, ce qui eſt la troiſieme partie du quotient, on multipliera le reſte 318 ſols par 12, le nombre de deniers que vaut le ſol, ce qui donnera 3816 deniers, & l'on diviſera ce produit par 322, ce qui donnera pour quotient 11 deniers + $\frac{274}{322}$ deniers; & cette ſeconde opération ſur le reſte fera connoître que l'aune de drap coûte 12 liv. + 1 ſ. + 11 d. + $\frac{274}{322}$ deniers.

ARTICLE VI.

Preuve de la Multiplication & de la Diviſion ſimples.

PREUVE DE LA MULTIPLICATION.

67. Puiſque dans la multiplication de deux nombres ſimples, conſidérés comme des nombres abſolus, le produit renferme l'un de ſes produiſans, lequel on voudra, autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre (n° 48.).

On propoſera, pour preuve de la multiplication, de diviſer le produit par le multiplicande ou par le multiplicateur, & l'on conclura que la multiplication a été faite ſans erreur, ſi, dans le premier cas, le quotient eſt égal au multiplicateur, ou ſi, dans le ſecond cas, le quotient eſt égal au multiplicande.

PREUVE DE LA DIVISION.

68. Puiſque le produit du quotient par le diviſeur eſt égal au dividende (n° 54.), on propoſera, pour preuve de la diviſion, de multiplier le quotient par le diviſeur, & l'on connoîtra que le quotient eſt vrai ou faux, ſelon que le produit fait de la multiplication ſera égal ou ne ſera pas égal au dividende.

On remarquera que lorſque la diviſion s'eſt faite avec un reſte, comme le quotient eſt compoſé de deux parties, à ſçavoir, d'un nombre entier, & de la diviſion indiquée du reſte du dividende, il faut, ſi la diviſion eſt bien faite, qu'en ajoutant enſemble le produit de la premiere partie du quotient, multipliée par le diviſeur, & le reſte de la diviſion, c'eſt-à-dire, la partie du dividende que l'on n'a pu diviſer, la ſomme ſoit égale au dividende.

Par exemple, on eſt ſûr que dans la diviſion de 39625 *par* 30, *la quantité* $1320 + \frac{25}{30}$ *eſt le vrai quotient, parce qu'en multipliant la premiere partie* 1320 *par le diviſeur* 30, *& en ajoutant au produit* 39600 *la partie* 25, *que l'on n'a pu diviſer, il vient le nombre* 39625, *qui eſt le dividende propoſé.*

CHAPITRE TROISIEME.

L'Addition, la Souſtraction, la Multiplication & la Diviſion algébriques.

ARTICLE I.

De l'Addition.

PROBLÊME.

69. *DEUX ou pluſieurs grandeurs algébriques étant données, exprimer leur ſomme.*

SOLUTION.

On écrira de ſuite les grandeurs propoſées, ſans changer leurs ſignes. La quantité qui réſultera, renfermera évidemment tous les termes des grandeurs propoſées, & en ſera par conſéquent la ſomme.

Que s'il ſe trouve des termes ſemblables dans cette ſomme, on les réduira ſelon qu'il a été dit (n° 38.).

EXEMPLES.

Pour exprimer la ſomme des grandeurs a & b, on écrira de ſuite $a + b$.

On ajoutera enſemble les grandeurs a & $-b$, en écrivant de ſuite $a - b$.

On ajoutera enſemble les grandeurs $3ab + 2c$, & $2b - 3d$, en écrivant $3ab + 2c + 2b - 3d$.

On ajoutera enſemble les grandeurs $3ab + 2c$ & $-2ab - 5c + 4d$.

En écrivant de ſuite $3ab + 2c - 2ab - 5c + 4d$, & faiſant $\begin{cases} 3ab - 2ab = ab \\ 2c - 5c = -3c \end{cases}$

la ſomme réduite ſera $ab - 3c + 4d$.

On ajoutera enſemble les grandeurs ſuivantes $4bd + 5ac - 3fb$ & $-2ac + 2cd + 3bf$, en écrivant de ſuite $4bd + 5ac - 3bf - 2ac + 2cd + 3bf$; & faiſant $\begin{cases} +5ac - 2ac = 3ac \\ -3bf + 3bf = 0 \end{cases}$

la ſomme réduite ſera $4bd + 3a + 2cd$.

70. *On remarquera que dans l'addition algébrique, la grandeur à laquelle on en ajoute une autre, n'eſt pas toujours augmentée, qu'elle eſt même quelquefois diminuée.*

Par exemple, ſi à la grandeur $3ab + 2c + 3f$
on ajoute la grandeur $-2ab - c$,
la ſomme réduite ſera $ab + c + 3f$,
quantité évidemment moindre que $3ab + 2c + 3f$.

On conclura de cette remarque que l'addition algébrique n'a pas pour objet d'augmenter les quantités, mais ſeulement de les joindre enſemble, quelqu'en doive être le réſultat.

ARTICLE II.

De la Souſtraction.

PROBLÊME.

71. *Deux grandeurs étant données, exprimer leur différence.*

SOLUTION.

Ayant écrit la grandeur dont on ſouſtrait, telle qu'elle ſe trouve, on écrira de ſuite la grandeur à ſouſtraire, avec des ſignes contraires, c'eſt-à-dire que les termes poſitifs de cette grandeur ſeront écrits avec le ſigne de la ſouſtraction, & ſes termes négatifs ſeront écrits avec le ſigne de l'addition.

Par exemple.

1°. Si on propoſe de retrancher la grandeur b de

la grandeur a, comme cette grandeur b à ſouſtraire eſt poſitive, on l'écrira à la ſuite de la grandeur a, avec le ſigne —, & la différence ſera $a - b$.

Ce qui eſt évident; car une grandeur poſitive quelconque b étant retranchée, doit être précédée du ſigne qui indique cette ſouſtraction, c'eſt-à-dire, du ſigne —, & l'excès de la grandeur a ſur la grandeur b ſera évidemment la grandeur a moins la grandeur b, c'eſt-à-dire, la quantité $a - b$.

2°. Si l'on propoſe de retrancher la grandeur $- b$ de la grandeur a, on écrira $+ b$ à la ſuite de la grandeur a, & la différence ſera $a + b$, c'eſt-à-dire que a ſurpaſſe la quantité $- b$ de toute la grandeur $a + b$.

Car la grandeur poſitive & la grandeur négative agiſſant en ſens contraire, comme un bien & une dette, l'excès de a ſur $- b$ ſera la premiere grandeur a plus la ſeconde grandeur b devenue poſitive; par la même raiſon, qu'une perſonne qui a 100 écus, & qui ne doit rien, eſt plus riche qu'une autre perſonne qui n'a rien, & qui doit 10 écus, de tout ce qu'elle a, & d'une ſomme égale à la dette de l'autre, c'eſt-à-dire, de $100 + 10$ écus.

3°. Si l'on propoſe de retrancher la grandeur $c - b$ de la grandeur a, on écrira la grandeur $- c + b$ à la ſuite de la grandeur a, en faiſant négatif le terme poſitif c, & poſitif le terme négatif $- b$, c'eſt-à-dire que la différence ſera $a - c + b$.

Pour concevoir pourquoi la grandeur $- b$ devient poſitive par la ſouſtraction, on conſidérera que la grandeur c étant plus grande que la quantité $c - b$ de la grandeur b, on retranche trop de toute cette quantité b, quand, pour ſouſtraire $c - b$ de a, on écrit d'abord $a - c$. Ainſi, afin que la ſouſtraction ſoit exacte, il faut ajouter à la différence $a - c$ ce

que l'on a ôté de trop, c'eſt-à-dire, $+ b$, & écrire pour la vraie différence $a - c + b$.

C'eſt donc par une compenſation néceſſaire que l'on change — en + dans la grandeur à ſouſtraire.

EXEMPLES.

Soit propoſée la grandeur $2b - 3c$ à retrancher de la grandeur $2a - 5b$.

On écrira la grandeur à ſouſtraire avec des ſignes contraires à la ſuite de l'autre,

& la différence ſera $2a - 5b - 2b + 3c$;

& faiſant $-5b - 2b = -7b$,

la différence réduite ſera $2a - 7b + 3c$ (38.).

Pour retrancher la grandeur $2ad - 5d + 3fh$

de la grandeur $2d - 3c + 3ad$,

on écrira avec des ſignes contraires la grandeur à ſouſtraire à la ſuite de l'autre grandeur, & la différence ſera $2d - 3c + 3ad - 2ad + 5d - 3fh$;

& en faiſant $\begin{cases} 2d + 5d = 7d \\ 3ad - 2ad = ad \end{cases}$

la différence réduite ſera $7d - 3c + ad - 3fh$ (38.).

72. *On remarquera que dans l'Algebre la grandeur de laquelle on ſouſtrait une autre grandeur, eſt quelquefois plus petite que le réſultat de la ſouſtraction.*

Par exemple, ſi dans la grandeur a *on retranche* $-b - c$, *la différence ſera* $a + b + c$, *qui eſt évidemment plus grande que la quantité* a *dont on ſouſtrait, ce qui montre que l'objet de la ſouſtraction n'eſt pas de diminuer la quantité dont on ſouſtrait, mais de déterminer l'excès de la grandeur dont on ſouſtrait ſur celle que l'on ſouſtrait.*

ARTICLE III.

De la Multiplication.

73. Pour ſe faire une idée de cette opération, & pour en ſaiſir la méthode.

1°. On ſe rappellera que pour exprimer le produit de deux grandeurs incomplexes, par exemple, a & b, on eſt convenu d'écrire ces deux quantités de ſuite, c'eſt-à-dire, ſans les ſéparer par aucun ſigne, de cette ſorte, ab ou ba (n° 23.). De même, pour exprimer le produit de ab par cd, on écrit $abcd$ ou $acbd$, en quel ordre on voudra.

2°. Comme on a introduit les expoſans dans l'Algebre, pour abréger les expreſſions (n° 37.), lorſque la quantité incomplexe multiplicande, & la quantité incomplexe multiplicateur, auront une même lettre, on n'exprimera point leur produit, en écrivant de ſuite cette lettre commune avec l'expoſant qu'elle a dans le multiplicande, & une ſeconde fois avec l'expoſant qu'elle a dans le multiplicateur, mais on écrira une ſeule fois cette lettre avec un expoſant égal à la ſomme de ſes expoſans.

Par exemple, pour exprimer le produit de a^3, multiplié par a^2, on n'écrira point $a^3\,a^2$, mais a^5, c'eſt-à-dire, une fois la lettre a avec l'expoſant 5, égal à la ſomme $3+2$ de ſes expoſans, & cette expreſſion a^5 repréſente vraiment le produit de $a^3 \times a^2$; car la grandeur $a^5 = aaaaa$ (n° 32.). Or $a^3 \times a^2$ ou $aaa \times aa$ donne auſſi $aaaaa$ (n° 32.).

De même, ſi l'on a à exprimer le produit de $a^3 b^2$, multiplié par ab, on n'écrira point $a^3 b^2 ab$, mais $a^4 b^3$, en mettant de ſuite la lettre a & la lettre b, la premiere avec l'expoſant 4, égal à la ſomme de l'expoſant 3, qu'elle a dans le multiplicande, & de

l'expoſant 1, qu'elle a dans le multiplicateur (n° 33.); la ſeconde avec l'expoſant 3, égal à la ſomme 2 + 1 de ſes expoſans.

3°. Le coefficient écrit ou ſuppoſé d'un terme déſignant combien de fois le terme doit être pris (n° 35.), il eſt viſible que, pour avoir le produit entier de deux termes que l'on propoſe de multiplier enſemble, il faut, outre la multiplication des lettres, faire celle des coefficiens.

Par exemple, pour multiplier enſemble les termes $2ab$, $4cd$, il faut multiplier les coefficiens 2 & 4, ce qui produira 8, & à la droite de 8 écrire le produit $abcd$ des lettres, ce qui donnera 8 $abcd$ pour le produit entier de $2ab$ multiplié par $4cd$.

En effet, ſi l'on avoit à multiplier $2ab$ par une fois cd, le produit ſeroit évidemment $2abcd$. Il eſt encore évident que le produit de la multiplication de $2ab$ par $4cd$ doit être quadruple du produit de $2ab$ multiplié par une fois cd, parce que $4cd$ eſt quadruple de cd (n° 46.). Or on rendra le produit $2abcd$ quadruple, en multipliant le coefficient 2 du multiplicande $2ab$ par le coefficient 4 du multiplicateur.

Donc dans la multiplication algébrique on doit multiplier les coefficiens.

4°. Dans la multiplication de deux grandeurs incomplexes, ſi le multiplicateur eſt poſitif, il eſt certain qu'il ſignifie qu'il faut ajouter le multiplicande une certaine quantité de fois, ce qui ne change pas le ſigne du multiplicande (n° 69.). Par conſéquent, ſi le multiplicateur étant poſitif, le multiplicande eſt auſſi poſitif, le produit ſera poſitif; & ſi le multiplicande eſt négatif, le produit ſera négatif.

Ce que l'on exprime ainſi $+\times+=+$, & $-\times+=-$, & ce que l'on prononce, en diſant, *plus multiplié par plus donne plus, & moins par plus donne moins.*

Par exemple, la multiplication de $+ab \times + cd$ donnera $+ abcd$ ou ſimplement $abcd$, & la multiplication $- ab \times + cd$ donnera $- abcd$.

Que ſi dans la multiplication de deux quantités incomplexes le multiplicateur eſt négatif, comme ſi l'on propoſoit de multiplier par -3 ou par -4, &c. le multiplicateur négatif ſignifie évidemment qu'il faut prendre le multiplicande moins une certaine quantité de fois, c'eſt-à-dire qu'il faut le ſouſtraire une certaine quantité de fois. Or cette ſouſtraction changera le ſigne du multiplicande (n° 71.), c'eſt-à-dire que, ſi le multiplicande eſt poſitif, la ſouſtraction le rendra négatif; & s'il eſt négatif, il deviendra par cette ſouſtraction poſitif. Par conſéquent, le multiplicateur étant négatif, ſi le multiplicande eſt poſitif, le produit ſera négatif; & ſi le multiplicande eſt négatif, le produit ſera poſitif.

Ce que l'on exprime ainſi $+ \times - = -$, & $- \times - = +$, & que l'on énonce, en diſant, *plus multiplié par moins donne moins, & moins multiplié par moins donne plus.*

On renfermera cette quatrieme obſervation dans les deux propoſitions ſuivantes.

PROPOSITION I.

74. *La Multiplication algébrique conſiſte à ajouter ou à ſouſtraire le multiplicande autant de fois qu'il eſt déſigné par le multiplicateur : à ajouter, ſi le multiplicateur eſt poſitif; à ſouſtraire, ſi le multiplicateur eſt négatif.*

PROPOSITION II.

75. *Lorſque le multiplicateur ſera poſitif, le produit aura le même ſigne que le multiplicande; & lorſque le multiplicateur ſera négatif, le produit aura un ſigne contraire*

contraire à celui du multiplicande; & par conſéquent plus multiplié par plus, & moins multiplié par moins, donnent plus, & plus multiplié par moins ou moins par plus donne moins.

PROBLÊME.

Faire le produit de deux grandeurs algébriques propoſées.

PREMIER CAS.

76. On ſuppoſera d'abord que les grandeurs algébriques propoſées ſont incomplexes, c'eſt-à-dire, des monomes, & l'on propoſera la méthode ſuivante.

SOLUTION.

1°. Si le multiplicateur eſt poſitif, on écrira au produit le ſigne du multiplicande; & ſi le multiplicateur eſt négatif, on écrira au produit le ſigne contraire à celui du multiplicande (75.).

2°. On multipliera enſemble le coefficient du multiplicande, & celui du multiplicateur (73.), & le réſultat ſera le coefficient du produit.

3°. On écrira de ſuite au produit les lettres du multiplicande, & celles du multiplicateur; & lorſque la même lettre ſe trouvera dans le multiplicande & dans le multiplicateur, on l'écrira une ſeule fois au produit, avec un expoſant égal à la ſomme de l'expoſant qu'elle a dans le multiplicande, & de celui qu'elle a dans le multiplicateur (73.).

EXEMPLE I.

Soit propoſé. . . . . $3a^2b$, multiplicande.
à multiplier par. . . . . $4ac$, multiplicateur.
on trouvera. . . . . $12a^3bc$, produit.

En opérant comme il ſuit.

1°. On fera le produit positif, c'est-à-dire qu'on lui supposera le signe +, parce que le multiplicateur étant positif, le multiplicande est aussi positif (n° 75.).

2°. On multipliera ensemble les coefficiens 3 & 4, ce qui donnera 12, & on écrira 12 pour le coefficient du produit (73.).

3°. On fera la multiplication des lettres $a^2 b$ du multiplicande par les lettres $a c$ du multiplicateur, ce qui donnera $a^3 b c$, en écrivant la lettre a avec l'exposant $3 = 2 + 1$ (73.), somme des exposans qu'elle a dans le multiplicande & dans le multiplicateur, & mettant de suite les autres lettres b & c.

EXEMPLE II.

Soit proposée la multiplication $\begin{cases} +3\,a^2 b, \text{ multiplicande.} \\ -4\,a\,c, \text{ multiplicateur.} \end{cases}$

on trouvera $-12\,a^3 b c$, produit.

En opérant comme il suit.

On donnera au produit le signe —, parce que le multiplicateur étant positif, le multiplicande est négatif (n° 75.).

On fera la multiplication des coefficiens 3 & 4, ce qui donnera 12, & l'on écrira 12 au produit.

On fera la multiplication des lettres, ce qui donnera $a^3 b c$, que l'on écrira au produit, & la grandeur $-12\,a^3 b c$ sera le produit cherché.

EXEMPLE III.

Soit proposée la multiplication $\begin{cases} +5\,c^2 d, \text{ multiplicande.} \\ -4\,b c^3 d, \text{ multiplicateur.} \end{cases}$

on trouvera $-20\,b c^5 d^2$, produit.

En opérant comme il suit.

On donnera au produit le signe —, parce que le multiplicateur étant négatif, le multiplicande est positif (n° 75.).

On écrira au produit le coefficient 20, parce que le produit de la multiplication des coefficiens 5 & 4 = 20.

On écrira au produit bc^5d^2, parce que $c^2d \times bc^3d = bc^5d^2$.

EXEMPLE IV.

Soit proposée la multiplication $\left\{\begin{array}{l} -5c^2d, \text{ multiplicande.} \\ -4bd^3, \text{ multiplicateur.} \end{array}\right.$

on trouvera. . . . . $+20bc^2d^4$, produit.

On donnera le signe + au produit, parce que le multiplicateur étant négatif, le multiplicande est aussi négatif (n° 75.).

On écrira 20 pour le coefficient du produit, parce que $5 \times 4 = 20$.

Enfin on écrira bc^2d^4, parce que les lettres c^2d du multiplicande, multipliées par les lettres bd^3 du multiplicateur, donnent bc^2d^4.

SECOND CAS.

77. *En supposant que les grandeurs dont on demande le produit sont, l'une complexe, & l'autre incomplexe, l'on proposera la méthode suivante pour faire leur multiplication.*

SOLUTION.

Prenant la grandeur incomplexe pour multiplicateur, & la complexe pour multiplicande, on écrira la premiere sous la seconde, & l'on tirera une barre sous ces quantités, pour les séparer du produit qui doit être écrit au dessous.

On multipliera ensuite chaque terme du multiplicande par le monome multiplicateur, en observant ce que l'on vient de pratiquer dans la multiplication

des grandeurs incomplexes (n° 76.), & l'on écrira chaque produit particulier au deſſous de la barre.

Lorſque tous les termes du multiplicande ſeront multipliés, la quantité qui ſe trouvera ſous la barre ſera le produit total cherché.

EXEMPLE I.

Soit propoſé le polinome $+4a^2b-4ac^2+6b^2f$, à multiplier par le monome $4ac$, les grandeurs étant diſpoſées comme on le voit,

on trouvera..... $16a^3bc-16a^2c^3+24ab^2cf$.

En opérant comme il ſuit.

On remarquera d'abord, en général, que le multiplicateur $4ac$ étant poſitif, il indique qu'il faut ajouter: par conſéquent chaque terme du produit que l'on va former, aura le même ſigne que le terme multiplié. Cela poſé,

On multipliera le premier terme $4a^2b$ par le multiplicateur $4ac$, ce qui produira $16a^3bc$, que l'on écrira ſous la barre, ſans aucun ſigne, parce que ce produit eſt poſitif.

On multipliera le ſecond terme $-4ac^2$ par le multiplicateur $4ac$, ce qui donnera $-16a^2c^3$, que l'on écrira ſous la barre.

On multipliera le troiſieme terme $+6b^2f$ par le multiplicateur $4ac$, ce qui produira $24ab^2cf$, que l'on écrira ſous la barre, avec le ſigne $+$ du terme multiplié.

Tous les termes du multiplicande étant ainſi multipliés, la grandeur $16a^3bc-16a^2c^3+24ab^2cf$ écrite ſous la barre, ſera le produit cherché.

EXEMPLE II.

Soit propoſée la multiplication

$16\,a^3b - 8\,ac^3 + 4\,b^2cf^3$, multiplicande.
$-\,3\,ac^2$, multiplicateur.

$-48\,a^4bc^2 + 24\,a^2c^5 - 12\,ab^2c^3f^3$, produit.

Le multiplicateur $-\,3\,ac$ étant négatif, il indique qu'il faut ſouſtraire : par conſéquent chaque terme du produit que l'on va former, aura un ſigne contraire à celui du terme multiplié.

Ainſi le premier terme $16\,a^3b$ du multiplicande étant poſitif, on écrira — au deſſous de la barre, & on fera ſuivre ce ſigne de $48\,a^4bc^2$, produit de la multiplication de $16\,a^3b$ par $3\,ac^2$.

Le ſecond terme du multiplicande ayant le ſigne —, on écrira + ſous la barre, & on fera ſuivre ce ſigne de $24\,a^2c^5$, produit de la multiplication de $8\,ac^3$ par $3\,ac^2$.

Le troiſieme terme du multiplicande ayant le ſigne +, on écrira — ſous la barre, & on fera ſuivre ce ſigne de $12\,ab^2c^3f^3$, que produit la multiplication de $4\,b^2cf^3$ par $3\,ac^2$.

Tous les termes du multiplicande étant multipliés, la quantité $-48\,a^4bc^2 + 24\,a^2c^5 - 12\,ab^2c^3f^3$, écrite ſous la barre, ſera le produit total.

TROISIEME CAS.

78. *On ſuppoſera que les grandeurs dont on demande le produit, ſont des polinomes, & l'on propoſera la méthode ſuivante.*

SOLUTION.

On écrira le multiplicateur ſous le multiplicande, & l'on tirera une barre au deſſous de ces quantités.

On multipliera enſuite le multiplicande par le premier terme du multiplicateur, en obſervant la méthode preſcrite pour la multiplication d'un polinome par un monome (n° 77.).

L'on écrira ſous la barre les termes de ce produit, à meſure qu'on les trouvera.

On multipliera de même le multiplicande par le ſecond terme du multiplicateur, & l'on écrira les termes de ce produit ſous la ligne du premier produit.

On placera ſous la ligne du ſecond produit les termes qui viendront, en multipliant le multiplicande par le troiſieme terme du multiplicateur, & ainſi de ſuite.

Ayant ainſi multiplié tout le multiplicande par tous les termes du multiplicateur, on tirera une barre, & on ajoutera les produits particuliers, en faiſant la réduction des termes ſemblables: la quantité qui viendra alors ſera le produit demandé.

EXEMPLE I.

Multiplier le polinome $2ac - 2ab + 3bc$ par le polinome $3ac - 3bc$.

Ces polinomes étant ainſi diſpoſés $\left\{\begin{array}{l} 2ac - 2ab + 3bc, \text{ multiplicande.} \\ 3ac - 3bc, \text{ multiplicateur.} \end{array}\right.$

Premier produit $6a^2c^2 - 6a^2bc + 9abc^2$

Second produit $-6abc^2 + 6ab^2c - 9b^2c^2$

Total $6a^2c^2 - 6a^2bc + 3abc^2 + 6ab^2c - 9b^2c^2$.

1°. On multipliera le multiplicande par le premier terme $3ac$ du multiplicateur, ce qui donnera le produit $6a^2c^2 - 6a^2bc + 9abc^2$, dont on écrira les termes ſous la barre, à meſure qu'on les trouvera.

2°. On multipliera le multiplicande par le ſecond

terme du multiplicateur $-3bc$, ce qui donnera le produit $-6abc^2+6ab^2c-9b^2c^2$, dont on écrira les termes ſous la ligne du premier produit, à meſure qu'on les trouvera.

3°. Le multiplicande étant ainſi multiplié par tous les termes du multiplicateur, on tirera une barre, au deſſous de laquelle on écrira de ſuite les termes de tous les produits que l'on a formé, obſervant de réduire les termes ſemblables, & l'on trouvera que le produit cherché eſt $6a^2c^2-6a^2bc+3abc^2+6ab^2c-9b^2c^2$.

EXEMPLE II.

Soit propoſée la multiplication

$2ab^2+3c^2d-4b^3f$, multiplicande.
$-3ab^2+4c^2d-2b^3f$, multiplicateur.

$-6a^2b^4-9ab^2c^2d+12ab^5f$, 1er produit.
$8ab^2c^2d+12c^4d^2-16b^3c^2df$, 2eme prod.
$-4ab^5f-6b^3c^2df+8b^6f^2$, 3eme produit.

$-6a^2b^4-ab^2c^2d+8ab^5f+12c^4d^2-22b^3c^2df+8b^6f^2$.
produit total.

1°. On multipliera le multiplicande par le premier terme $-3ab^2$ du multiplicateur, ce qui donnera le premier produit $-6a^2b^4-9ab^2c^2d+12ab^5f$. Donc on écrira les termes ſous la barre, à meſure qu'on les trouvera.

2°. On multipliera le multiplicande par le ſecond terme du multiplicateur $+4c^2d$, ce qui donnera le ſecond produit $8ab^2c^2d+12c^4d^2-16b^3c^2df$, dont on écrira les termes ſous la ligne du premier produit, à meſure qu'on les trouvera.

3°. On multipliera le multiplicande par le troiſieme terme $-2b^3f$ du multiplicateur, ce qui donnera le troiſieme produit $-4ab^5f-6b^3c^2df+8b^6f^2$,

dont on écrira les termes ſous la ligne du ſecond produit, à meſure qu'on les trouvera.

4°. Enfin le multiplicande étant ainſi multiplié par tous les termes du multiplicateur, on ajoutera enſemble, & on réduira ces produits particuliers, & on aura pour produit total le polinome $-6a^2b^4 - ab^2c^2d + 8abf + 12c^4d - 22b^2c^2df + 8b^6f^2$.

ARTICLE IV.

De la Diviſion.

79. *Diviſer*, c'eſt dans un produit donné, un de ſes produiſans étant donné, trouver l'autre (n° 55.). Le produit ſe nomme *dividende*, le produiſant donné ſe nomme *diviſeur*, & l'on appelle *quotient* le produiſant cherché.

80. On déduira aiſément les procédés de la diviſion de ce que l'on a dit touchant la multiplication (73.).

1°. Dans la multiplication de deux grandeurs incomplexes ab, cd, on exprime le produit des lettres en écrivant ces lettres de ſuite, de cette ſorte, $abcd$. Donc le produit $abcd$ étant donné avec les lettres ab de l'un de ſes produiſans, on aura les lettres de l'autre produiſant ou du quotient, en prenant dans le produit $abcd$ les lettres cd différentes de celles du produiſant ab.

2°. Lorſque les deux produiſans ont la même lettre, on exprime leur produit en écrivant une ſeule fois cette lettre avec un expoſant égal à la ſomme de l'expoſant que cette lettre a dans le multiplicande, & de celui qu'elle a dans le multiplicateur. Donc, lorſqu'un produit & l'un de ſes produiſans renfermeront la même lettre avec des expoſans différens, on aura le ſecond produiſant en écrivant une fois cette

lettre avec la différence des expoſans qu'elle a dans le produit & dans le produiſant donné.

Par exemple, étant donné le produit a^5 & le produiſant a^2, il faudra prendre, pour le ſecond produiſant, a^3, c'eſt-à-dire, la même lettre a avec l'expoſant 3, égal à la différence de l'expoſant 5 qu'elle a dans le produit, & de l'expoſant 2 qu'elle a dans le produiſant donné.

Et en réuniſſant tout ce que l'on vient de dire, le produit $a^3 b^2 c$ & le produiſant $a^2 b^2$ étant donnés, l'autre produiſant ſera néceſſairement ac, c'eſt-à-dire, la lettre a avec l'expoſant ſous-entendu 1, égal à la différence de l'expoſant 3 que cette lettre a dans le produit, & de l'expoſant 2 qu'elle a dans le produiſant donné; & en outre la lettre c, qui ne ſe trouvant pas dans le produiſant donné, appartient néceſſairement à l'autre produiſant.

3°. Le coefficient du produit de deux grandeurs incomplexes eſt toujours le réſultat de la multiplication des coefficiens des deux produiſans. Donc, lorſqu'on connoîtra le coefficient du produit, & celui de l'un de ſes produiſans, on aura le coefficient de l'autre produiſant, en diviſant le coefficient du produit par le coefficient du produiſant connu.

Par exemple, ſi le produit eſt 18 ab, & le produiſant connu 3 b, on aura le coefficient du ſecond produiſant, en diviſant le coefficient 18 du produit par le coefficient 3 du produiſant 3 b, en diſant, en 18, combien de fois 3? 6 fois, & 6 ſera le coefficient du ſecond produiſant.

4°. Le produit de deux grandeurs incomplexes n'eſt poſitif que lorſque les produiſans ſont, ou tous les deux poſitifs, ou tous les deux négatifs. Donc le produit étant poſitif, ſi le produiſant donné eſt poſitif, l'autre produiſant ou le quotient ſera auſſi poſitif;

& ſi, le produit étant toujours poſitif, le produiſant donné eſt négatif, l'autre produiſant ou le quotient ſera auſſi négatif.

Le produit de deux grandeurs incomplexes n'eſt négatif que lorſqu'un de ſes produiſans eſt négatif, & l'autre poſitif. Donc, lorſque le produit donné étant négatif, le produiſant donné ſera poſitif, l'autre produiſant ou le quotient cherché ſera négatif, & il ſera poſitif lorſque le produit étant négatif, le produiſant donné ſera auſſi négatif.

On renfermera dans la propoſition ſuivante ce que l'on vient de dire touchant le ſigne du quotient.

PROPOSITION.

81. *Dans la diviſion algébrique*, 1°. *plus diviſé par plus, ou moins diviſé par moins, donne plus, ce qui ſignifie que le quotient eſt toujours poſitif lorſque le dividende & le diviſeur ſont tous les deux poſitifs ou tous les deux négatifs.*

2°. *Plus diviſé par moins, ou moins diviſé par plus, donne moins, ce qui ſignifie que le quotient eſt toujours négatif lorſque le dividende & le diviſeur ont des ſignes contraires.*

PROBLÊME.

Un produit étant donné avec un de ſes produiſans, trouver l'autre produiſant.

PREMIER CAS.

82. *On ſuppoſera d'abord que le produit & le produiſant donnés, c'eſt-à-dire que le dividende & le diviſeur ſont des grandeurs incomplexes, & l'on propoſera la méthode ſuivante.*

SOLUTION.

Le dividende & le diviſeur étant diſpoſés de la même maniere que dans la diviſion arithmétique,

On donnera ou on ſuppoſera au quotient le ſigne + lorſque le dividende & le diviſeur ſeront tous les deux poſitifs ou tous les deux négatifs ; & lorſque le dividende & le diviſeur auront des ſignes contraires, on donnera au quotient le ſigne — (80.).

On diviſera le coefficient du dividende par celui du diviſeur, & le réſultat de cette diviſion ſera le coefficient du quotient.

On effacera dans le dividende toutes les lettres qui ſe trouvent dans le produiſant connu, c'eſt-à-dire, dans le diviſeur, & on écrira au quotient celles qui reſteront, c'eſt-à-dire, celles qui ne ſe trouvent pas au diviſeur ; & lorſque le dividende & le diviſeur renfermeront la même lettre, on écrira au quotient cette lettre avec un expoſant égal à la différence de l'expoſant qu'elle a dans le dividende, & de celui qu'elle a dans le diviſeur.

EXEMPLE I.

Soit propoſée la quantité $12\,a^3\,bc$ à diviſer par $4\,ac$.

Le dividende & le diviſeur étant ainſi diſpoſés } Divid. $12\,a^3\,bc$ { $4\,ac$, diviſeur. / $3\,a^2\,b$, quotient.

1°. On fera le quotient poſitif, c'eſt-à-dire qu'on lui ſuppoſera le ſigne + (80.), parce que le dividende & le diviſeur n'étant précédés d'aucun ſigne, ils ſont cenſés poſitifs (28.).

2°. On diviſera le coefficient 12 du dividende par le coefficient 4 du diviſeur, en diſant, en 12 combien de fois 4 ? 3 fois, & l'on écrira 3 au quotient, ſous le diviſeur (80.).

3°. On diviſera les lettres du dividende par les lettres du diviſeur, en diſant a^3bc diviſé par $ac = a^2b$, en retranchant l'expoſant 1 de la lettre a dans le diviſeur de l'expoſant 3 de la même lettre dans le dividende, & en effaçant dans le dividende la lettre c du diviſeur (80.). On écrira donc a^2b au quotient, à la droite du coefficient 3, & la quantité $3a^2b$, écrite ſous le diviſeur, ſera le quotient de $12a^3bc$ diviſé par $4ac$, c'eſt-à-dire, le ſecond produiſant de $12a^3bc$, puiſque le quotient $3a^2b$, multiplié par le diviſeur $4ac$, donne un produit $12a^3bc$ égal au dividende ou au produit propoſé.

EXEMPLE II.

Soit propoſée la diviſion } Divid. $-16a^3b^2c$ { $\frac{4a^2b}{-4abc}$, diviſeur, quotient.

1°. On écrira — au quotient, ſous le diviſeur, parce que le diviſeur & le dividende ont des ſignes contraires (80.).

2°. On diviſera (80.) le coefficient du dividende par celui du diviſeur, en diſant, 16 diviſé par $4 = 4$, & l'on écrira 4 au quotient, à la droite du ſigne —.

3°. On diviſera les lettres du dividende par les lettres du diviſeur, en diſant, a^3b^2c, diviſé par a^2b, $= abc$, en retranchant l'expoſant 2 de la lettre a dans le diviſeur de l'expoſant 3 de la même lettre dans le dividende, & l'expoſant 1 ſuppoſé à la lettre b dans le diviſeur de l'expoſant 2 de cette même lettre b dans le dividende, & en conſervant la lettre c, qui ne ſe trouve pas dans le diviſeur (80.). On écrira donc abc au quotient, à la ſuite du coefficient 4.

Et la quantité $-4abc$, écrite ſous le diviſeur, ſera le quotient cherché, c'eſt-à-dire, le ſecond produiſant du produit $-16a^3b^2c$, puiſque le quotient

$-4abc$, multiplié par le diviſeur $4a^2b$, donne un produit $-16a^3b^2c$ égal au produit ou au dividende propoſé.

EXEMPLE III.

Soit propoſée la diviſion } Div. $16a^4b^3x^2$ { $-2ax$, diviſeur. / $-8a^3b^3x$, quotient.

1°. On écrira $-$ au quotient, parce que le dividende & le diviſeur ont des ſignes contraires (80.).

2°. On diviſera les coefficiens, en diſant, en 16 combien de fois 2 ? 8 fois, & l'on écrira 8 au quotient, à la ſuite du ſigne $-$.

3°. On diviſera les lettres du dividende par les lettres du diviſeur, en diſant, $a^4b^3x^2$, diviſé par ax, donne a^3b^3x, en retranchant dans le dividende de l'expoſant 4 de la lettre a l'expoſant 1 ſuppoſé à cette même lettre dans le diviſeur, & de l'expoſant 2 de la lettre x, l'expoſant 1 ſuppoſé à cette même lettre x dans le diviſeur. On écrira donc a^3b^3x au quotient, à la ſuite du coefficient 8, & la quantité $-8a^3b^3x$, écrite ſous le diviſeur, ſera le quotient ou le ſecond produiſant du produit $16a^4b^3x^2$, puiſque le quotient $-8a^3b^3x$, multiplié par le diviſeur $-2ax$, donne un produit $16a^4b^3x^2$ égal au produit ou dividende propoſé.

EXEMPLE IV.

Soit propoſée la diviſion } Div. $-18a^5c^2x^3$ { $-6aex$, diviſeur. / $3a^4cx^2$, quot.

1°. On ſuppoſera au quotient le ſigne $+$, parce que le dividende & le diviſeur ſont négatifs (80.).

2°. On diviſera le coefficient du dividende par celui du diviſeur, en diſant, en 18 combien de fois 6 ? 3 fois, & l'on écrira 3 ſous le diviſeur pour le coefficient du quotient (80.).

3°. On diviſera les lettres du dividende par celles du diviſeur, en diſant, $a^6 c^2 x^3$, diviſé par acx, donne $a^5 cx^2$, puiſque $a^5 cx^2 \times acx = a^6 c^2 x^3$. On écrira donc $a^5 cx^2$ ſous le diviſeur, à la ſuite du coefficient 3, & la quantité $3 a^5 cx^2$, écrite ſous le diviſeur, ſera le quotient cherché (80.).

SECOND CAS.

83. *On ſuppoſera que le produit donné, c'eſt-à-dire, le dividende, eſt un polinome, & que le produiſant ou le diviſeur donné eſt un monome; & ſi on conſidere que le polinome donné pour dividende a été formé en multipliant par le produiſant donné chaque terme du produiſant cherché, on conclura la méthode ſuivante.*

SOLUTION.

Le dividende & le diviſeur étant diſpoſés comme dans la diviſion arithmétique, on diviſera chaque terme du dividende par le monome diviſeur, en obſervant ce que l'on vient de pratiquer dans la diviſion des monomes (82.). On écrira ſous le diviſeur le quotient de chaque diviſion particuliere; & lorſque toutes les diviſions particulieres ſeront achevées, la quantité qui ſe trouvera ſous le diviſeur ſera le quotient cherché.

EXEMPLE.

Soit propoſée la diviſion

$$12a^3bc - 16a^3b^2c + 16a^4b^3cx^2 \left\{ \begin{array}{l} 2ac, \text{ diviſeur.} \\ \hline 6a^2b - 8a^2b^2 + 8a^3b^3x^2 \end{array} \right.$$

Dividende. quotient.

On diviſera le premier terme $12 a^3 bc$ du dividende par le diviſeur $2ac$, ce qui donnera $6 a^2 b$ pour le premier terme du quotient, que l'on écrira ſous le diviſeur.

On diviſera le ſecond terme $-16a^3b^2c$ du dividende par le diviſeur $2ac$, ce qui donnera $-8a^2b^2$ pour le ſecond terme du quotient. On écrira donc $-8a^2b^2$ au quotient, à la ſuite du premier terme.

On diviſera le troiſieme terme $+16a^4b^3cx^2$ du dividende par le diviſeur $2ac$, ce qui donnera le terme $+8a^3b^3x^2$ pour le troiſieme du quotient, & on l'écrira au quotient, à la ſuite du ſecond terme.

Ainſi ayant diviſé tous les termes du dividende, on trouvera que le quotient total ou le ſecond produiſant du dividende eſt toute la quantité écrite ſous le diviſeur, c'eſt-à-dire, le polinome $6a^2b - 8a^2b^2 + 8a^3b^3x^2$, puiſque cette quantité multipliée par le diviſeur, c'eſt-à-dire, par le produiſant connu $2ac$, redonne le dividende ou le produit propoſé $12a^3bc - 16a^3b^2c + 16a^4b^3cx^2$.

TROISIEME CAS.

84. *On ſuppoſera que le produit & le produiſant donnés ſont des polinomes ; & ſi on conſidere que le produit a été formé en multipliant le produiſant donné par chaque terme du produiſant cherché, s'il en a plus d'un, on conclura la méthode ſuivante.*

SOLUTION.

On commencera par choiſir dans le dividende & dans le diviſeur la lettre qui ſe trouve dans le plus de termes, & l'on diſpoſera les termes de ces deux quantités de façon que les premiers ſoient ceux où cette lettre a le plus haut expoſant ; & que le ſecond ſoit celui dans lequel cette même lettre a le plus grand expoſant après le premier, ainſi de ſuite : c'eſt ce que l'on appelle *ordonner le dividende & le diviſeur.*

Que s'il ſe trouvoit pluſieurs termes dans leſquels la même lettre eût le même expoſant, alors on or-

donneroit encore ces termes, par rapport à une autre lettre commune à ces deux quantités.

Le dividende & le diviſeur étant ainſi préparés & diſpoſés comme dans la diviſion arithmétique, on diviſera le premier terme du dividende par le premier terme du diviſeur, & l'on écrira ſous le diviſeur le quotient de cette premiere diviſion. Enſuite on multipliera par le terme mis au quotient le diviſeur entier, & l'on ſoustraira du dividende les termes de ce produit, en les écrivant ſous le dividende, à meſure qu'on les trouvera, avec des ſignes contraires à ceux qu'aura donné la multiplication (n° 71.). Enfin cette multiplication & cette ſoustraction étant faites, on tirera une barre, on fera la réduction du dividende & du produit ſoustrait, & la quantité qui reſtera ſera un ſecond dividende.

On obſervera que lorſque la multiplication du diviſeur par le terme mis au quotient donnera des termes qui ne ſeront pas ſemblables à quelqu'un des termes du dividende, & qui ſubſiſteront par conſéquent après la réduction, il faudra placer ces termes de maniere que le nouveau dividende ſoit toujours ordonné.

On diviſera le premier terme du ſecond dividende par le premier terme du diviſeur, & le quotient de cette diviſion étant le ſecond terme du quotient cherché, on l'écrira ſous le diviſeur, à la ſuite du premier; on multipliera le diviſeur entier par le ſecond terme du quotient; on ſoustraira du dividende actuel les termes de ce produit, en les écrivant, à meſure qu'on les trouvera, avec des ſignes contraires à ceux qu'ils auront par la multiplication (71.). Enfin on tirera une barre, & l'on réduira; & s'il reſte quelque choſe après la réduction, ce reſte ſera un troiſieme dividende, ſur lequel on opérera comme l'on

l'on a opéré ſur les premiers, & l'on continuera les opérations juſqu'à ce qu'il ne reſte rien au dividende.

On voit que les procédés dans la diviſion des polinomes ſont exactement les mêmes que ceux de la diviſion arithmétique, lorſque le diviſeur eſt repréſenté par pluſieurs chiffres. On diviſe, on multiplie & on ſouſtrait également dans l'une & l'autre diviſion, & ces procédés ſont évidemment appuyés ſur les mêmes raiſons.

EXEMPLE I.

Soit propoſée la quantité $9a^3b^2x - 4a^4b^2cx - 6a^3bcx^2 + 6a^4b^3$ à diviſer par la quantité $-2a^2bcx + 3a^2b^2$.

Ayant ordonné les quantités, par rapport à la lettre a & à la lettre b, & les ayant diſpoſé ainſi que l'on voit.

Dividende.	Diviſeur.
$6a^4b^3 - 4a^4b^2cx + 9a^3b^2x - 6a^3bcx^2$	$3a^2b - 2a^2bcx$
$-6a^4b^3 + 4a^4b^2cx$	$2a^2b$, quot.
$+9a^3b^2x - 6a^3bcx^2$	

1°. On diviſera le premier terme $6a^4b^3$ du dividende par le premier terme $3a^2b^2$ du diviſeur, ce qui donnera $2a^2b$, que l'on écrira ſous le diviſeur.

On multipliera enſuite tous les termes du diviſeur par le terme $2a^2b$ mis au quotient; & comme ce produit doit être retranché du dividende, on en écrira les termes ſous le dividende, avec des ſignes contraires à ceux qu'ils auront par la multiplication. On dira donc, $3a^2b^2$ multiplié par $2a^2b = 6a^4b^3$; & comme ce produit eſt poſitif, & qu'il doit être retranché, on l'écrira avec le ſigne — ſous le dividende. Paſſant au ſecond terme du diviſeur, on dira, $-2a^2bcx$ multiplié par $2a^2b$ donne $-4a^4b^2cx$;

& en le ſouſtrayant, on écrira ſous le dividende $+ 4a^4b^2cx$.

Ayant ainſi formé & ſouſtrait le produit de la multiplication de tous les termes du diviſeur par le premier terme $2a^2b$ mis au quotient, on tirera une barre, & l'on réduira. La réduction donnera la quantité $+ 9a^3b^2x - 6a^3bcx^2$ pour un ſecond dividende.

Dividende. Diviſeur.

$$\begin{array}{l|l} 6a^4b^3 - 4a^4b^2cx + 9a^3b^2x - 6a^3bcx^2 & 3a^2b^2 - 2a^2bcx \\ -6a^4b^3 + 4a^4b^2cx & \hline 2a^2b + 3ax, \text{ quotient.} \\ \hline \text{Second divid. } +9a^3b^2x - 6a^3bcx^2 & \\ -9a^3b^2x + 6a^3bcx^2 & \\ \hline 0 \qquad 0 & \end{array}$$

2°. On diviſera le premier terme $9a^3b^2x$ du nouveau dividende par le premier terme $3a^2b^2$ du diviſeur, ce qui donnera $+ 3ax$ pour ſecond terme du quotient, que l'on écrira à la ſuite du premier $2a^2b$.

On multipliera enſuite tous les termes du diviſeur par le ſecond terme $3ax$ du quotient, ce qui donnera, en changeant les ſignes pour la ſouſtraction, la quantité $- 9a^3b^2x + 6a^3bcx^2$, dont on écrira les termes ſous le dividende actuel, à meſure qu'on les trouvera. On tirera une barre, & l'on réduira; & comme il ne reſtera rien au dividende après la réduction, on conclura que la diviſion eſt exacte, & que le quotient cherché ou le ſecond produiſant demandé eſt $2a^2b + 3ax$, puiſqu'ayant multiplié le diviſeur par chaque terme du quotient, & ayant retranché du dividende les produits de ces multiplications, le dividende s'eſt trouvé épuiſé.

EXEMPLE II.

Soit proposée la quantité $8ab^3 + 9a^4 - a^2b^2 - 4b^4$ à diviser par la quantité $-2ab + 3a^2 + 2b^2$.

Ayant ordonné le dividende & le diviseur par rapport à la lettre a, & les ayant disposé ainsi qu'on le voit.

Dividende proposé.

$$\begin{array}{l|l} 9a^4 - 4a^2b^2 + 8ab^3 - 4b^4 & \left\{\begin{array}{l} 3a^2 - 2ab + 2b^2, \text{ diviſ.} \\ \hline 3a^2, \text{ quotient.} \end{array}\right. \\ -9a^4 + 6a^3b - 6a^2b^2 & \\ \hline +6a^3b - 10a^2b^2 + 8ab^3 - 4b^4 & \end{array}$$

1°. On diviſera le premier terme $9a^4$ du dividende par le premier terme $3a^2$ du diviſeur, ce qui donnera $3a^2$ pour le premier terme du quotient. On écrira donc $3a^2$ ſous le diviſeur.

On multipliera enſuite le diviſeur par le premier terme $3a^2$ du quotient, ce qui donnera, en changeant les ſignes, la quantité ſuivante $-9a^4 + 6a^3b - 6a^2b^2$, que l'on placera ſous le dividende.

On fera la réduction, & écrivant le reſte de façon que le terme $6a^3b$, introduit par la multiplication, ſoit le premier, pour que la quantité reſte ordonnée par rapport à la lettre a.

On aura le nouveau dividende $6a^3b - 10a^2b^2 + 8ab^3 - 4b^4$.

Dividende proposé.

$$\begin{array}{l|l} 9a^4 - 4a^2b^2 + 8ab^3 - 4b^4 & \left\{\begin{array}{l} 3a^2 - 2ab + 2b^2, \text{ diviſ.} \\ \hline 3a^2 + 2ab, \text{ quotient.} \end{array}\right. \\ -9a^4 + 6a^3b - 6a^2b^2 & \\ \hline 2^{\text{eme}} \text{ div. } 6a^3b - 10a^2b^2 + 8ab^3 - 4b^4 & \\ -6a^3b + 4a^2b^2 - 4ab^3 & \\ \hline -6a^2b^2 + 4ab^3 - 4b^4 & \end{array}$$

2°. On diviſera le premier terme $6a^3b$ du nouveau dividende par le premier terme $3a^2$ du divi-

ſeur, ce qui donnera $+ 2ab$ pour le ſecond terme du quotient.

On multipliera le diviſeur par le ſecond terme $2ab$ du quotient, ce qui produira, en changeant les ſignes, $-6a^3b + 4a^2b^2 - 4ab^3$, que l'on écrira ſous le dividende actuel.

On réduira, & le reſte $-6a^2b^2 + 4ab^3 - 4b^4$ ſera un troiſieme dividende.

Dividende propoſé.

$9a^4 - 4a^2b^2 + 8ab^3 - 4b^4$ $\left\{\begin{array}{l} 3a^2 - 2ab + 2b^2, \text{ diviſ.} \\ \hline 3a^2 + 2ab - 2b^2, \text{ quot.} \end{array}\right.$

$-9a^4 + 6a^3b - 6a^2b^2$

2eme div. $6ab - 10a^2b^2 + 8ab^3 - 4b^4$

$-6a^3b + 4a^2b^2 - 4ab^3$

3eme divid. $-6a^2b^2 + 4ab^3 - 4b^4$

$+6a^2b^2 - 4ab^3 + 4b^4$

0 0 0

3°. On diviſera le premier terme $-6a^2b^2$ du troiſieme dividende par le premier terme $3a^2$ du diviſeur, ce qui donnera $-2b^2$ pour le troiſieme terme du quotient.

On multipliera le diviſeur par le troiſieme terme $-2b^2$ du quotient, ce qui produira, en changeant les ſignes pour la ſouſtraction, la quantité $+6a^2b^2 - 4ab^3 + 4b^4$, que l'on écrira ſous le dividende actuel.

On réduira; & comme il ne reſtera rien au dividende, on conclura que le produiſant ou le quotient cherché eſt exactement toute la quantité écrite ſous le diviſeur, c'eſt-à-dire, $3a^2 + 2ab - 2b^2$.

Pour s'exercer dans ces ſortes d'opérations, on commencera par multiplier enſemble deux grandeurs quelconques; puis l'on diviſera le produit par l'un des produiſans, pour trouver l'autre au quotient.

REMARQUE.

85. 1°. *Lorſque le diviſeur ſera égal au dividende, le quotient ſera égal à l'unité, parce qu'une grandeur eſt renfermée une fois dans ſon égale, ou parce que le dividende peut être conſidéré comme le produit fait de la multiplication du diviſeur par l'unité. Par exemple,* 3 ab *diviſé par* 3 ab, *donne* 1.

Parce que 3 ab *diviſé par* 3 ab = 3 ab × 1 *diviſé par* 3 ab, *& qu'il eſt évident que le diviſeur* 3 ab *eſt renfermé dans le produit* 3 ab × 1, *autant qu'il eſt déſigné par le multiplicateur* 1, *c'eſt-à-dire, une fois.*

86. 2°. Puiſque diviſer, c'eſt dans un produit donné, l'un de ſes produiſans étant donné, trouver l'autre (55.), il eſt évident que lorſque le dividende n'eſt pas le produit du diviſeur par une autre quantité, il eſt impoſſible de déterminer un quotient exact, ainſi qu'on l'a fait dans les diviſions précédentes. Dans ce cas on ſe contente d'indiquer la diviſion comme une fraction, en mettant le dividende au deſſus du diviſeur, & en les ſéparant l'un de l'autre par une barre horizontale.

Par exemple, ſi l'on propoſe de diviſer la quantité $3ab$ par la quantité ac, ou la quantité $3ab+2ax$ par la quantité $2ad$, on indiquera ces diviſions de cette ſorte $\frac{3ab}{ac}$, $\frac{3ab+2ax}{2ad}$

On donnera dans la ſuite la maniere de réduire ces diviſions indiquées, lorſque le dividende & le diviſeur ont quelque multiplicateur commun.

CHAPITRE QUATRIEME.

Opérations ſur les Fractions.

ARTICLE I.

DÉFINITIONS.

87. *La fraction* eſt, comme on l'a déja dit (8.), une ou pluſieurs des parties égales dans leſquelles on conçoit l'unité diviſée. Par exemple, dans la fraction $\frac{3}{4}$ d'écus, le nombre inférieur 4, que l'on nomme *dénominateur*, repréſente l'écu diviſé en 4 parties égales, & le nombre ſupérieur 3, que l'on nomme *numérateur*, exprime que l'on prend 3 de ces 4 parties égales.

Lorſque le numérateur eſt plus petit que le dénominateur, la *fraction* eſt *proprement dite*, ſinon elle eſt *improprement dite*. Par exemple, la fraction $\frac{2}{5}$ eſt une fraction proprement dite, & la fraction $\frac{6}{5}$ eſt improprement dite.

Deux nombres ſont dits *premiers entr'eux* lorſqu'ils n'ont point de produiſant commun différent de l'unité : tels ſont les nombres 5 & 8, 7 & 12, 3 & 10, 13 & 17, 15 & 19, &c.

Une fraction eſt dite *réduite à ſes moindres termes* ou *irréductible*, lorſque ſon numérateur & ſon dénominateur ſont premiers entr'eux ; telle eſt la fraction $\frac{5}{7}$ ou la fraction $\frac{11}{12}$.

On nomme *fraction de fraction* une ou pluſieurs des parties égales, dans leſquelles on conçoit qu'une fraction eſt diviſée. Par exemple, ſi l'on conçoit la fraction $\frac{2}{5}$, diviſée en 4 parties égales, & que l'on

prenne 3 de ces parties, il réſultera la fraction trois quarts de deux cinquiemes, que l'on nomme *fraction de fraction*, & que l'on exprime ainſi, $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$.

On nomme *fraction de fraction de fraction* une ou pluſieurs des parties égales, dans leſquelles on conçoit une fraction de fraction diviſée. Par exemple, ſi l'on conçoit la fraction de fraction $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$, diviſée en 8 parties égales, & que l'on prenne 7 de ces parties, il réſultera la quantité ſept huitiemes de trois quarts de deux cinquiemes, que l'on nomme *fraction de fraction de fraction*, & que l'on exprime ainſi, $\frac{7}{8}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$.

En partageant en pluſieurs parties égales une fraction de fraction de fraction, & en prenant une ou pluſieurs de ces parties égales, on formera *une fraction de fraction de fraction de fraction* ou ſimplement une fraction d'un *quatrieme ordre*, & ainſi de ſuite à l'infini.

PROPOSITION.

88. *La fraction eſt l'expreſſion d'une quantité diviſée par une autre, c'eſt-à-dire qu'elle eſt le quotient de la diviſion du numérateur par le dénominateur.*

Par exemple, la fraction $\frac{5}{9}$ *peut être conſidérée comme le quotient du numérateur* 5, *diviſé par le dénominateur* 9; car diviſer 5 par 9, c'eſt perdre la neuvieme partie de chacune des unités qui compoſent le nombre 5 (55.). Ces 5 unités donneront donc enſemble pour quotient cinq neuviemes ou la fraction $\frac{5}{9}$, & par conſéquent cette fraction $\frac{5}{9}$ eſt le quotient de 5 diviſé par 9.

Et comme l'on pourra faire le même raiſonnement ſur toute autre fraction, on conclura en général qu'une fraction eſt le quotient de la diviſion du numérateur par le dénominateur.

CONSÉQUENCES.

89. 1°. Puiſque la fraction eſt l'expreſſion d'une diviſion qui a le numérateur pour dividende, & le dénominateur pour diviſeur (88.), & que de plus il eſt évident que l'on ne change point la valeur d'une grandeur, en la multipliant & en la diviſant par une même quantité, on conclura que pour *changer une grandeur en une fraction d'un dénominateur donné, & de même valeur que cette grandeur*, il faudra la multiplier par le dénominateur donné, faire de ce produit un numérateur, & écrire au deſſous le dénominateur donné.

Par exemple, pour changer le nombre 8 en fraction dont le dénominateur ſoit 6, & dont la valeur ſoit 8, on prendra pour numérateur le produit 8×6, fait de la multiplication du nombre 8 par le dénominateur 6, & l'on écrira au deſſous de ce produit le dénominateur donné 6 de cette ſorte $\frac{8 \times 6}{6}$ ou $\frac{48}{6}$.

En général, pour changer la quantité a en une fraction dont le dénominateur ſoit b, & dont la valeur ſoit la quantité a, on écrira $\frac{ab}{b}$.

Et pour changer la quantité a en une fraction de même valeur que cette quantité, & dont le dénominateur ſoit $a - b$, on écrira $\frac{aa - ab}{a - b}$.

90. 2°. La fraction ſera égale à l'unité lorſque le numérateur ſera égal au dénominateur Par exemple, $\frac{4}{4} = 1$.

Car, lorſque le diviſeur eſt égal au dividende, le quotient eſt égal à l'unité : or une fraction eſt le quotient de la diviſion du numérateur par le dénominateur.

Il ſuit du même principe que lorſque le numérateur ſera plus grand que le dénominateur, la fraction vaudra autant de fois l'unité que le dénominateur ſera contenu dans le numérateur.

Et la fraction vaudra moins que l'unité lorſque le numérateur ſera plus petit que le dénominateur.

91. 3°. Lorſqu'il s'agira d'*évaluer* une fraction, c'eſt-à-dire, de déterminer ſa valeur en quantités connues, on opérera comme on a fait ſur les reſtes de diviſion dans l'arithmétique; on multipliera le numérateur par le nombre qui exprimera combien de fois l'unité principale renferme une unité de moindre valeur & de la même eſpece, & l'on diviſera ce produit par le dénominateur.

Par exemple, pour déterminer en ſols la valeur de $\frac{3}{5}$ d'écus, comme cette fraction eſt la même choſe que le cinquieme de trois écus, ou le quotient de 3 écus diviſé par 5, & que chaque écu vaut 60 ſols, on multipliera le numérateur 3 par 60, ce qui donnera 180 ſols; on diviſera enſuite ce produit par 5, & le quotient 36 ſols ſera la valeur de $\frac{3}{5}$ d'écus.

92. 4°. Lorſqu'une fraction ſera improprement dite, *on déterminera les entiers qu'elle renferme*, en diviſant ſon numérateur par ſon dénominateur; & s'il reſte quelque choſe, on en fera le numérateur d'une nouvelle fraction, qui aura le même dénominateur que la fraction propoſée; & cette nouvelle fraction jointe au quotient que l'on aura trouvé, ſera la valeur de la fraction propoſée.

Par exemple, ſi l'on veut réduire la fraction $\frac{25}{8}$ aux entiers qu'elle renferme, on diviſera le numérateur 25 par le dénominateur 8, & l'on aura 3 pour quotient, avec le reſte 1, qui étant diviſé par le dénominateur 8, donnera la fraction $\frac{1}{8}$, de maniere que la valeur totale de $\frac{25}{8}$ ſera $3 + \frac{1}{8}$.

En général, si l'on propose la fraction $\frac{a^2+2ab+b^2+m}{a+b}$ on divisera le numérateur par le dénominateur, ce qui donnera le quotient $a+b$, avec un reste m, dont on indiquera la division par le dénominateur $a+b$, & la fraction proposée sera convertie dans la quantité $a+b+\frac{m}{a+a}$.

93. 5°. Lorsqu'il s'agira de *multiplier une fraction par un entier*, il faudra multiplier le numérateur de cette fraction par l'entier proposé, & appliquer à ce produit le même dénominateur.

Car la fraction est le quotient de la division du numérateur par le dénominateur (n° 88.). Or, pour multiplier par une quantité quelconque le quotient d'une division, il suffit de multiplier le dividende par cette quantité, le diviseur restant le même (n° 56.).

Ainsi, si l'on propose de multiplier la fraction $\frac{3}{4}$ par le nombre 5, on multipliera le numérateur 3 par le multiplicateur donné 5, ce qui produira le nombre 15; on appliquera ensuite à ce produit le même dénominateur 4, & l'on aura la fraction $\frac{15}{4}=3+\frac{3}{4}$ pour le produit de la fraction $\frac{3}{4}$ multipliée par 5.

En général, $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$, & $\frac{a-b}{x}\times m=\frac{am-bm}{x}$

94. 6°. Lorsqu'il s'agira de *diviser une fraction par un entier*, il suffira de multiplier le dénominateur de cette fraction par l'entier proposé, & faire une nouvelle fraction qui ait ce produit pour dénominateur, & le même numérateur que la fraction proposée.

En effet une fraction est le quotient de la division du numérateur par le dénominateur (n° 88.). Or, pour diviser par une quantité quelconque le quotient d'une division, il suffit de multiplier le diviseur par cette quantité, le dividende restant le même (n° 57.).

Ainſi, lorſque l'on propoſe de diviſer la fraction $\frac{3}{4}$ par le nombre 5, on multipliera le dénominateur 4 par le nombre 5, ce qui produira 20; on fera enſuite la nouvelle fraction $\frac{3}{20}$ de même numérateur que la propoſée, & dont le dénominateur ſoit le produit 20 fait de la multiplication du dénominateur 4 de la fraction par le nombre 5.

En général, la fraction $\frac{a}{b}$ diviſée par $c = \frac{a}{bc}$, & la fraction $\frac{a-b}{c-m}$ diviſée par $f = \frac{a-b}{cf-fm}$.

95. 7°. Une fraction ne changera pas de valeur lorſque l'on multipliera ou que l'on diviſera ſes deux termes par une même quantité.

Car le quotient d'une diviſion reſte le même lorſque l'on multiplie ou que l'on diviſe le dividende & le diviſeur par une même quantité (n° 58, 59.).

C'eſt ſur cette derniere conſéquence que ſera appuyée la méthode que l'on va donner pour réduire les fractions à leurs moindres termes, & pour les réduire à la même dénomination.

On propoſera d'abord ces deux problêmes, après leſquels on enſeignera à ajouter, ſouſtraire, multiplier & diviſer les fractions.

ART. II.

PROBLÊME I.

96. Réduire une fraction à ſes moindres termes.

SOLUTION.

On réduira une fraction à ſes moindres termes, en effaçant dans ſes deux termes le plus grand & commun produiſant qu'ils renferment, c'eſt-à-dire, en diviſant le numérateur & le dénominateur par le plus grand commun diviſeur exact; car une fraction ne

change point de valeur lorſqu'on diviſe ſes deux termes par une même quantité (n° 95.); & lorſque l'on diviſera le numérateur & le dénominateur par la plus grande & commune quantité qui a concouru à les former par la multiplication, ces termes deviendront évidemment les plus petits avec leſquels on puiſſe faire une fraction de même valeur que la fraction propoſée.

Ainſi, pour réduire à ſes moindres termes la fraction ſuivante $\frac{4x}{4ax+4bx}$ on diviſera le numérateur & le dénominateur par la quantité $4x$, qui eſt évidemment le plus grand & commun produiſant, puiſque le numérateur $4x = 1 \times 4x$, & le dénominateur $4ax + 4bx = a+b \times 4x$; & la fraction réduite ſera $\frac{1}{a+b}$

De même dans $\frac{3bx+3abx}{3bcx-6bfx}$

le numérateur étant égal à $1+a \times 3bx$
& le dénominateur $3bcx - 6fbx$ étant $= c-2f \times 3bx$, on aura, en effaçant le produiſant commun, $3bx$, c'eſt-à-dire, en diviſant par ce plus grand & commun diviſeur.

La fraction réduite $\frac{1+a}{c-2f}$

dans la fraction $\frac{4}{12}$,
le numérateur étant égal à 1×4,
& le dénominateur étant égal à 3×4,
4 eſt évidemment un commun produiſant, & en même tems le plus grand commun produiſant, par rapport au numérateur & au dénominateur. Ainſi, en diviſant par 4 les deux termes de la fraction propoſée, la fraction réduite à ſes moindres termes, ſera $\frac{1}{3}$.

Mais lorſque les termes d'une fraction ſont des

nombres conſidérables, l'on ne voit pas tout de ſuite quel eſt leur plus grand commun produiſant, c'eſt-à-dire, la plus grande & commune quantité par laquelle il faut diviſer : c'eſt pourquoi on propoſera, pour la déterminer, la méthode ſuivante.

Méthode pour trouver le plus grand & commun diviſeur exact des deux termes d'une fraction.

97. 1°. On diviſera le plus grand terme de la fraction par le moindre terme ; & ſi cette diviſion ſe fait ſans reſte, le moindre terme ſera le plus grand & commun diviſeur, par rapport aux deux termes de la fraction.

Par exemple, pour trouver le plus grand & commun diviſeur exact des termes de la fraction $\frac{4}{36}$, on diviſera le plus grand terme par le plus petit 4 ; & comme le quotient eſt exactement 9, ce moindre terme 4 ſera le plus grand & commun diviſeur exact, par rapport aux termes de la fraction $\frac{4}{36}$.

D'abord ce moindre terme 4 ſera un diviſeur exact & commun ; car il diviſe exactement 36, & il ſe diviſe lui-même. Il eſt encore le plus grand commun diviſeur ; car le nombre 4 ne peut être diviſé par un nombre plus grand que lui-même. Ainſi en diviſant les deux termes de la fraction $\frac{4}{36}$ par le moindre terme 4, elle ſe réduira à $\frac{1}{9}$, dont les termes ſont premiers entr'eux.

2°. Si, en diviſant le plus grand terme d'une fraction par le moindre, la diviſion ne ſe fait pas ſans reſte, on diviſera le moindre terme par le reſte, puis le reſte de la premiere diviſion par le reſte de la ſeconde, enſuite le reſte de la ſeconde par le reſte de la troiſieme, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que l'on trouve un diviſeur exact : ce diviſeur exact ſera le plus grand & commun diviſeur du numérateur & du dénominateur de la fraction propoſée.

Par exemple, pour trouver le plus grand commun diviſeur exact des termes de la fraction $\frac{306}{324}$, on diviſera le plus grand terme 324 par le moindre 306, ce qui donnera le quotient 1, & il reſtera 18

$$324 \left\{ \begin{matrix} 306 \\ 1 + \frac{18}{306} \end{matrix} \right.$$

Négligeant le quotient 1, on diviſera le moindre terme 306 par le reſte 18. . . . . 306 $\left\{ \begin{matrix} 18 \\ 17 \end{matrix} \right.$, ce qui donnera exactement 17 au quotient; on prendra le reſte 18 pour le plus grand commun diviſeur exact, par rapport aux deux termes de la fraction $\frac{306}{324}$.

D'abord 18 ſera diviſeur exact, par rapport aux termes de cette fraction; car, en diviſant le dénominateur 324 par 306, on a trouvé qu'il y étoit contenu 1 fois avec un reſte 18, d'où l'on conclura que $324 = 306 \times 1 + 18$; & par conſéquent la quantité qui diviſera exactement $306 + 18$, qui ſont les deux parties de 324, diviſera auſſi 324.

Mais, en diviſant 306 par 18, on a trouvé que la diviſion étoit ſans reſte: d'ailleurs 18 diviſe 18. Donc le reſte 18 diviſe exactement le numérateur 306, & il diviſe exactement les deux parties $306 + 18$ du dénominateur 324; & par conſéquent il eſt un diviſeur exact, par rapport aux deux termes de la fraction $\frac{306}{324}$.

Ce reſte 18 ſera en outre le plus grand commun diviſeur des termes de la fraction $\frac{306}{324}$.

Car tout nombre qui diviſera exactement 306 & 324, diviſera exactement 306 & 18, parce que le nombre $324 = 306 + 18$: or la partie 18 ne peut être diviſée par un nombre plus grand que 18.

Ce reſte 18 étant ainſi trouvé le plus grand & commun diviſeur des termes de la fraction $\frac{306}{324}$, ſi on fait la diviſion, il viendra la fraction $\frac{17}{18}$ de même

valeur que la fraction $\frac{306}{324}$, & dont les termes ſont deux nombres premiers entr'eux.

Que ſi le reſte de la premiere diviſion n'eût pas diviſé exactement le moindre terme 306, il auroit fallu diviſer le premier reſte 18 par le reſte de la ſeconde diviſion ; & ſi cette diviſion eût encore eu un reſte, il auroit fallu diviſer le reſte de la ſeconde diviſion par le reſte de la troiſieme, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que l'on eût trouvé un diviſeur exact.

PROBLÊME II.

98. *Réduire deux ou pluſieurs fractions au même dénominateur.*

SOLUTION.

1°. Pour réduire deux fractions au même dénominateur, ſans rien changer à leur valeur, on multipliera chaque terme de la premiere par le dénominateur de la ſeconde, & chaque terme de la ſeconde par le dénominateur de la premiere.

Par cette opération l'on aura deux nouvelles fractions, qui auront pour dénominateur commun le produit des dénominateurs des deux fractions propoſées, & de plus ces nouvelles fractions auront même valeur que les premieres, puiſque les termes de chacune des propoſées auront été multipliés par une même quantité (n° 95.).

Par exemple, ſi l'on propoſe de donner un même dénominateur aux fractions $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{9}$, on multipliera les deux termes 3 & 5 de la premiere par le dénominateur 9 de la ſeconde, ce qui donnera la nouvelle fraction $\frac{3\times 9}{5\times 9} = \frac{27}{45}$.

On multipliera les deux termes 2 & 9 de la ſeconde par le dénominateur 5 de la premiere, ce qui

donnera la nouvelle fraction $\frac{2\times5}{9\times5} = \frac{10}{45}$; & par ces opérations, les fractions $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{9}$ ſeront changées en celles-ci de même dénomination $\frac{27}{45}$, $\frac{10}{45}$, leſquelles ſont de même valeur que les premieres.

En général, ſi on propoſe de réduire à un même dénominateur les fractions $\frac{a-b}{c}$, $\frac{f+d}{g}$, on fera les nouvelles fractions $\frac{ag-bg}{cg}$, $\frac{fc+cd}{cg}$, en multipliant les deux termes de la premiere par le dénominateur g de la ſeconde, & les deux termes de la ſeconde par le dénominateur c de la premiere.

2°. Pour donner à tant de fractions que l'on voudra le même dénominateur, ſans rien changer à leur valeur, on multipliera le numérateur & le dénominateur de chacune des fractions propoſées par le produit des dénominateurs des autres.

Par exemple, ſi on propoſe de réduire à la même dénomination les fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$.

On multipliera les deux termes 1 & 5 de la premiere par le produit 5×7 des dénominateurs de la ſeconde & de la troiſieme, & l'on aura la premiere fraction $\frac{1}{3}$ = la nouvelle fraction $\frac{1\times5\times7}{3\times5\times7}$.

On multipliera les deux termes 2 & 5 de la ſeconde par le produit 3×7 des dénominateurs de la premiere & de la troiſieme, & l'on aura la ſeconde fraction $\frac{2}{5}$ = la nouvelle fraction $\frac{2\times3\times7}{5\times3\times7}$.

On multipliera les deux termes 4 & 7 de la troiſieme par le produit 3×5 des dénominateurs de la premiere & de la ſeconde, & l'on aura la troiſieme fraction $\frac{4}{7}$ = la nouvelle fraction $\frac{4\times3\times5}{7\times3\times5}$.

Et les fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$, réduites à la même dénomination,

nation, deviendront $\frac{1\times5\times7}{3\times5\times7}$, $\frac{2\times3\times7}{5\times3\times7}$, $\frac{4\times3\times5}{7\times3\times5}$.

On pourra abréger l'opération en multipliant ensemble tous les dénominateurs, puis chaque dénominateur par le produit des dénominateurs des autres fractions.

Par exemple, pour réduire à la même dénomination les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{2f}{c}$, $\frac{3x}{d}$.

On fera le produit bcd des dénominateurs; puis, pour avoir le numérateur de la premiere fraction réduite, on multipliera le numérateur a par le produit cd des dénominateurs de la seconde & de la troiſieme fraction propoſées.

Et l'on aura la nouvelle fraction $\frac{acd}{bcd} = \frac{a}{b}$.

Pour avoir le numérateur de la ſeconde fraction réduite, on multipliera le numérateur $2f$ par le produit bd des dénominateurs de la premiere & de la troiſieme fraction propoſées, & l'on aura la nouvelle fraction $\frac{2fbd}{bcd} = \frac{2f}{c}$.

Pour avoir le numérateur de la troiſieme fraction réduite, on multipliera le numérateur $3x$ par le produit bc des dénominateurs de la premiere & de la ſeconde fraction propoſées, & l'on aura la nouvelle fraction $\frac{3bcx}{bcd} = \frac{3x}{d}$; & les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{2f}{c}$, $\frac{3x}{d}$, réduites à la même dénomination, deviendront $\frac{acd}{bcd}$, $\frac{2fbd}{bcd}$, $\frac{3xbc}{bcd}$.

99. Lorſqu'on s'appercevra que le plus grand des dénominateurs des fractions propoſées eſt diviſible par le dénominateur de chaque autre fraction, on pourra réduire ces fractions à la même dénomina-

tion, en multipliant les deux termes de chacune par le quotient qui viendra, en diviſant par ſon dénominateur le plus grand des dénominateurs.

Par exemple, étant propoſées les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{64}$.

Comme le plus grand dénominateur 64 eſt diviſible par chacun des autres dénominateurs 2, 4, 16, on réduira toutes ces fractions à la même dénomination, en opérant comme il ſuit.

On diviſera le plus grand dénominateur 64 par le dénominateur 2 de la premiere fraction $\frac{1}{2}$, ce qui donnera au quotient 32; on multipliera enſuite les deux termes de la fraction $\frac{1}{2}$ par 32, & l'on aura la fraction $\frac{1}{2} = \frac{32}{64}$.

On diviſera le plus grand dénominateur 64 par le dénominateur 4 de la ſeconde fraction $\frac{3}{4}$, ce qui donnera 16 pour quotient.

On multipliera enſuite les deux termes de la fraction $\frac{3}{4}$ par le quotient 16, & l'on aura la fraction $\frac{3}{4} = \frac{48}{64}$.

On diviſera le plus grand dénominateur 64 par le dénominateur 16 de la troiſieme fraction $\frac{5}{16}$, ce qui donnera 4 pour quotient.

On multipliera enſuite les deux termes de la fraction $\frac{5}{16}$ par le quotient 4, & l'on aura la nouvelle fraction $\frac{5}{16} = \frac{20}{64}$.

Par ce moyen, les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{64}$ auront toutes la même dénomination, en devenant $\frac{32}{64}$, $\frac{48}{44}$, $\frac{20}{64}$, $\frac{7}{64}$.

PROBLÊME III.

100. *Trouver la ſomme de pluſieurs fractions.*

SOLUTION.

1°. Si les fractions propoſées ont la même déno-

mination, on ajoutera enſemble les numérateurs ; & comme la ſomme qui réſultera ſera un nombre d'unités fractionnaires, de même dénomination que les fractions propoſées, on écrira ſous la ſomme des numérateurs le dénominateur commun.

Par exemple, ſi l'on propoſe d'ajouter enſemble les fractions $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, dont les unités ſont toutes des cinquiemes, on ajoutera enſemble les numérateurs 1, 2, 4, ce qui donnera 7 ; & ſous cette ſomme 7 on écrira le dénominateur commun 5, & l'on aura $\frac{7}{5}$ ou $1 + \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5}$.

En général, pour exprimer la ſomme des fractions. . . . . $\frac{ax}{c}, \frac{bm}{c}, \frac{fn}{c}$,

on écrira. . . . . $\frac{ax+bm+fn}{c}$.

2°. Si les fractions propoſées n'ont pas le même dénominateur, comme l'on n'en pourra pas déterminer la ſomme, tandis que les unités fractionnaires ſeront différentes, on les réduira d'abord au même dénominateur (n° 98.) ; puis on en fera la ſomme comme on vient de le dire.

Par exemple, pour déterminer la ſomme des fractions. . . . . $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$,

on les changera d'abord en celles-ci, de même dénomination. . . . . $\frac{15}{30}, \frac{20}{30}, \frac{18}{30}$;

on ajoutera enſuite les numérateurs de ces nouvelles fractions ; & écrivant ſous la ſomme le dénominateur commun 30, on aura la fraction. . . $\frac{53}{60} = 1 + \frac{23}{60}$ pour la ſomme des fractions propoſées.

En général, étant propoſées les fractions

pour en exprimer la ſomme on les changera d'abord en celles-ci, de même dénomination. . . . . $\frac{2a}{c}, \frac{3b}{f}, \frac{4m}{p}$, $\frac{2afp}{cfp}, \frac{3bcp}{cfp}, \frac{4mcf}{cfp}$;

puis on ajoutera enſemble les numérateurs de ces nouvelles fractions, & l'on écrira ſous la ſomme qui réſultera le dénominateur commun cfp, ce qui donnera la nouvelle fraction $\frac{2afp+3bcp+4mcf}{cfp}$, laquelle ſera la ſomme des fractions réduites, & par conſéquent celle des fractions propoſées.

PROBLÊME IV.

101. *Trouver la différence de deux fractions propoſées.*

SOLUTION.

1°. Si les fractions propoſées ont le même dénominateur, on retranchera le numérateur de la fraction à ſouſtraire du numérateur de l'autre fraction; & comme la différence qui réſultera ſera un nombre d'unités fractionnaires, de même dénomination que les fractions propoſées, on écrira ſous la différence des numérateurs le dénominateur commun.

Par exemple, ſi l'on propoſe de retrancher $\frac{2}{9}$ de $\frac{7}{9}$, on retranchera le numérateur 2 de la fraction à ſouſtraire $\frac{2}{9}$ du numérateur 7 de la fraction $\frac{7}{9}$: la différence ſera 5. L'on écrira le dénominateur commun 9 ſous cette différence 5, & l'on aura la fraction $\frac{5}{9}$ pour la différence des fractions propoſées.

En général, pour exprimer la différence des fractions $\frac{2ax}{f}$, $\frac{3b}{f}$, on écrira $\frac{2ax-3b}{f}$.

2°. Si les fractions propoſées ont différens dénominateurs, on leur donnera d'abord la même dénomination (n° 98.), puis on en prendra la différence comme on vient de le dire.

Par exemple, ſi on propoſe de déterminer l'excès de $\frac{7}{9}$ ſur $\frac{2}{5}$, on changera d'abord ces fractions en

celles-ci $\frac{35}{45}$, $\frac{18}{45}$, de même dénomination ; puis on fera la fraction $\frac{17}{45}$, de même dénomination que les nouvelles fractions, & dont le numérateur eſt la différence des numérateurs de ces fractions, & l'on aura $\frac{17}{45} = \frac{35}{45} - \frac{18}{45} = \frac{7}{9} - \frac{2}{5}$.

En général, pour retrancher la fraction $\frac{2ax}{p}$ de la fraction $\frac{3by}{q}$,

on changera d'abord ces fractions en celles-ci, $\frac{2axq}{pq}$, $\frac{3byp}{pq}$, de même dénomination ; puis on retranchera le numérateur de la fraction à ſouſtraire du numérateur de l'autre, & l'on écrira ſous la différence le dénominateur commun pq, ce qui donnera $\frac{3byp - 2axq}{pq}$ pour la différence des fractions propoſées.

PROBLÊME V.

102. *Trouver le produit d'une fraction multipliée par une fraction, ou d'un entier multiplié par une fraction.*

SOLUTION.

Multiplier par une fraction, c'eſt à la fois multiplier par ſon numérateur, & diviſer le produit par ſon dénominateur.

Par exemple, la fraction $\frac{2}{5}$ étant la même choſe que 2 diviſé par 5, ou la cinquieme partie de 2 (88.), il eſt viſible que multiplier par $\frac{2}{5}$ une quantité quelconque, entiere ou fractionnaire, c'eſt prendre cette quantité la cinquieme partie de deux fois, ou la prendre d'abord deux fois, & réduire le produit à ſa cinquieme partie, ce qui eſt la même choſe que de multiplier par le numérateur 2, & diviſer en même tems par le dénominateur 5.

On démontrera de même que multiplier par toute autre fraction, c'eſt multiplier par le numérateur de cette fraction, & diviſer le produit par le dénominateur. Cela poſé.

1°. Si l'on propoſe de multiplier une fraction par une fraction, comme l'on vient de voir que multiplier une fraction par une fraction, c'eſt multiplier la premiere par le numérateur de la ſeconde, & diviſer le produit par le dénominateur de cette ſeconde, & que l'on ſçait d'ailleurs (n° 93.) que l'on multiplie une fraction par un entier, en multipliant le numérateur par cet entier, & qu'on la diviſe par un entier, en multipliant le dénominateur par cet entier (n° 94.),

On conclura que la multiplication d'une fraction par une fraction ſe fait en multipliant l'un par l'autre les numérateurs, & l'un par l'autre les dénominateurs des fractions propoſées, & en faiſant une nouvelle fraction, dont le numérateur ſoit le produit des numérateurs, & le dénominateur le produit des dénominateurs des fractions propoſées.

Par exemple, pour avoir le produit de la fraction $\frac{4}{5}$, multipliée par la fraction $\frac{7}{9}$.

On multipliera l'un par l'autre les numérateurs 4 & 7, ce qui donnera le produit $4 \times 7 = 28$,

On multipliera de même l'un par l'autre les dénominateurs 9 & 5, ce qui donnera le produit $9 \times 5 = 45$, & l'on fera pour le produit cherché la fraction $\frac{4 \times 7}{9 \times 5} = \frac{28}{45}$.

En général, ſi on propoſe de multiplier l'une par l'autre les fractions. . . , $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$,

on fera la nouvelle fraction $\frac{a \times b}{c \times d} = \frac{ab}{cd}$.

De même, ſi l'on propoſe de multiplier l'une par l'autre les fractions $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a-b}{d}$, on fera la nouvelle fraction $\frac{\overline{a+b} \times \overline{a-b}}{c \times d} = \frac{a^2-b^2}{cd}$.

2°. Si on propoſe de multiplier un entier par une fraction, comme multiplier une quantité quelconque par une fraction, c'eſt multiplier par le numérateur de cette fraction, & diviſer par ſon dénominateur, on conclura que pour avoir le produit demandé, il faudra multiplier l'entier propoſé par le numérateur de la fraction donnée, & diviſer le produit par ſon dénominateur, c'eſt-à-dire qu'il faudra faire une nouvelle fraction qui ait pour numérateur le produit de l'entier propoſé, multiplié par le numérateur de la fraction donnée, & dont le dénominateur ſoit celui de cette fraction.

Ainſi le produit de l'entier 5, multiplié par la fraction $\frac{6}{7}$, ſera $\frac{5\times6}{7} = \frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7}$.

En général, le produit de la grandeur a, multipliée par la fraction $\frac{b}{c}$, eſt $\frac{ab}{c}$.

On voit que la multiplication d'un entier par une fraction ſe fait comme la multiplication d'une fraction par un entier.

REMARQUE.

103. *Les fractions des fractions n'étant que des fractions dont la multiplication eſt indiquée.*

Par exemple, l'expreſſion $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ ne ſignifiant autre choſe que la fraction $\frac{3}{4}$, priſe deux tiers de fois, il eſt viſible qu'on réduira les fractions de fractions de quel ordre on voudra à une ſimple fraction, en multipliant enſemble les numérateurs, & enſemble les dénomina-

teurs, & en faiſant une nouvelle fraction dont le numérateur ſoit le produit de tous les numérateurs, & dont le dénominateur ſoit le produit de tous les dénominateurs.

Par exemple, la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *ſe réduira à la fraction ſimple* $\frac{2\times3}{3\times4}$ *ou bien à la fraction* $\frac{2}{4}$, *en effaçant le produiſant 3 commun au numérateur & au dénominateur; & la fraction de fraction de fraction* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{5}$ *de* $\frac{5}{7}$ *ſe réduira à la fraction ſimple* $\frac{2\times3\times5}{3\times5\times7} = \frac{2}{7}$, *en effaçant les produiſans 3 & 5 communs à ſes deux termes.*

PROBLÊME VI.

104. *Trouver le quotient d'une fraction diviſée par une fraction, & d'un entier diviſé par une fraction.*

SOLUTION.

Diviſer par une fraction, c'eſt diviſer par ſon numérateur, & multiplier en même tems par ſon dénominateur.

Par exemple, la fraction $\frac{2}{5}$ étant la même choſe que la cinquieme partie de 2 (88.), il eſt viſible que diviſer par $\frac{2}{5}$ une quantité quelconque, entiere ou fractionnaire, c'eſt la diviſer non par 2, mais par la cinquieme partie de 2, ce qui donnera un quotient cinq fois plus grand que ſi on diviſoit par 2 exactement; & par conſéquent c'eſt diviſer d'abord par le numérateur 2, puis multiplier le quotient par le dénominateur 5.

On démontrera de même que diviſer par toute autre fraction, c'eſt diviſer par le numérateur de cette fraction, & multiplier le quotient par le dénominateur. Cela poſé.

1°, Si l'on propoſe de diviſer une fraction par une

fraction, comme l'on vient de voir que diviſer une fraction par une fraction, c'eſt diviſer la premiere par le numérateur de la ſeconde, & multiplier le quotient par le dénominateur de cette ſeconde, & que l'on ſçait d'ailleurs (n° 94.) que l'on diviſe une fraction par un entier, en multipliant le dénominateur par cet entier, & qu'on la multiplie en multipliant le numérateur par cet entier (n° 93.), on conclura que la diviſion d'une fraction par une fraction ſe fait en multipliant le dénominateur de la premiere par le numérateur de la ſeconde, & le numérateur de la premiere par le dénominateur de la ſeconde, pour faire une nouvelle fraction qui ait pour dénominateur le premier produit, & pour numérateur le ſecond.

Par exemple, pour déterminer le quotient de la fraction $\frac{4}{5}$, diviſée par $\frac{7}{9}$.

On multipliera le dénominateur 5 de la premiere par le numérateur 7 de la ſeconde, ce qui donnera $5 \times 7 = 35$.

On multipliera enſuite le numérateur 4 de la premiere par le dénominateur 9 de la ſeconde, ce qui donnnera $4 \times 9 = 36$.

Et l'on fera pour le quotient demandé la fraction $\frac{4 \times 9}{5 \times 7} = \frac{35}{36}$, dont le dénominateur eſt le produit du dénominateur de la premiere, multiplié par le numérateur de la ſeconde, & dont le numérateur eſt le produit du numérateur de la premiere, multiplié par le dénominateur de la ſeconde.

En général, pour déterminer le quotient de la fraction $\frac{a}{b}$, diviſée par la fraction $\frac{c}{d}$, on fera la nouvelle fraction $\frac{ad}{bc}$, qui ſera le quotient cherché.

2°. Si l'on propoſe de diviſer un entier par une

fraction ; comme diviſer par une fraction, c'eſt diviſer l'entier par le numérateur de cette fraction, & multiplier le quotient par le dénominateur, on conclura que, pour avoir le quotient demandé, il faudra faire une fraction qui ait pour numérateur le produit de l'entier donné par le dénominateur de la fraction propoſée, & pour dénominateur le numérateur de cette fraction.

Ainſi le quotient de l'entier 5, diviſé par la fraction $\frac{6}{7}$, ſera $\frac{5\times7}{6} = \frac{35}{6} = 5 + \frac{5}{6}$,

en multipliant l'entier 5 par le dénominateur 7, & en diviſant le produit par le numérateur 6, c'eſt-à-dire, en multipliant l'entier 5 par la fraction renverſée $\frac{7}{6}$.

105. En général, le quotient de l'entier a, diviſé par la fraction $\frac{b}{c}$, ſera le produit de cet entier a, multiplié par la fraction renverſée $\frac{c}{b}$, c'eſt-à-dire que ce quotient ſera $\frac{ac}{b}$.

CHAPITRE CINQUIEME.

Opérations de l'Arithmétique ſur les nombres compoſés.

DÉFINITIONS.

ON nomme *nombre compoſé* celui qui renferme des unités de différentes valeurs, qui ont rapport à la même eſpece.

Tels ſont les nombres { 100 livres 8 ſols 7 deniers. / 54 aunes $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{7}$ d'aune.

106. Les unités de différentes valeurs, dont on ſe ſert ordinairement en France, pour les monnoies, ſont la *livre*, le *ſol* & le *denier*.

La livre.	℔		20 ß
Le ſol s'exprime par	ß, & vaut		12 ₰
Le denier.	₰		

Les unités de différentes valeurs, dont on ſe ſert ordinairement pour meſurer les longueurs, ſont, la *toiſe*, le *pied*, le *pouce*, la *ligne*, l'*aune*, &c.

La toiſe	T	6 pieds.
Le pied	P	12 pouces.
Le pouce		
s'expr. par	P, & vaut	12 lignes.
La ligne	L	12 points.
L'aune	A	3 pi. 7 pou. 10 l. + $\frac{1}{6}$ de l.

Les unités de différentes valeurs, dont on ſe ſert ordinairement pour les poids, ſont, la *livre*, le *marc*, l'*once*, le *gros*, le *ſcrupule* ou *denier*, & le *grain*.

La livre.	℔		2 M
Le marc.	M		8 ℥
L'once s'exprime par	℥,	& vaut	8 ʒ
Le gros.	ʒ		3 ℈
Le denier.	℈		24 G
Le grain.	G		

Les unités de différentes valeurs, dont on ſe ſert pour meſurer le tems, ſont, le *ſiecle*, qui contient cent ans, l'*année*, le *mois*, la *ſemaine*, le *jour*, l'*heure*, la *minute*, la *ſeconde*, &c.

ARTICLE I.

Addition des nombres compoſés.

PROBLÊME.

107. *Trouver la ſomme de deux ou de pluſieurs nombres compoſés.*

SOLUTION.

Pour avoir la ſomme de deux ou de pluſieurs nombres compoſés, on les diſpoſera de maniere que toutes les unités de même dénomination & de même degré ſoient les unes ſous les autres; enſuite, ayant tiré une barre au deſſous pour les ſéparer de leur ſomme, on fera l'addition de chaque colonne, en commençant par celle dont les unités ſont de la moindre valeur; & ſi le nombre réſultant renferme une ou pluſieurs unités de la colonne ſuivante, on retiendra ces unités pour les ajouter avec celle de cette colonne ſuivante, & l'on écrira le reſte ſous la colonne dont on aura fait l'addition.

Lorſque toutes les colonnes ſeront ajoutées, on aura au deſſous de la barre la ſomme des nombres propoſés.

EXEMPLE I.

On propoſe d'ajouter enſemble les nombres compoſés.	196 liv.	14 ſ.	9 den.
	467	11	11
	978	17	10
Somme	1643 liv.	4 ſ.	6 den.

Les nombres propoſés étant diſpoſés comme on le voit dans l'exemple, de façon que les unités de même dénomination & de même degré ſoient les unes ſous les autres, c'eſt-à-dire, les deniers ſous les deniers, les ſols ſous les ſols, les livres ſous les livres, & les unités ſimples ſous les unités ſimples, les dizaines ſous les dizaines, &c.

1°. On commencera par déterminer la ſomme des unités de la moindre valeur, c'eſt-à-dire, des deniers, en diſant, 10 & 11 font 21, & 9 font 30 deniers; & comme dans 30 deniers il y a deux fois 12 deniers, qui font 2 ſols & 6 deniers, on écrira 6 deniers au deſſous de la barre, dans la colonne des unités de deniers, & l'on retiendra 2 ſols pour les ajouter à la colonne des ſols.

2°. On ajoutera enſemble les chiffres de la colonne des ſols, en prenant ſucceſſivement la ſomme des unités de ſols, & celle des dizaines de ſols; & en commençant par les 2 ſols que l'on a retenus, on dira, 2 ſols que l'on a retenus, & 7 font 9, & 1 font 10, & 4 font 14 ſols, c'eſt-à-dire, une dizaine de ſols & 4 ſols : on écrira 4 ſols ſous la colonne des unités de ſols, & l'on retiendra 1 dizaine.

Paſſant à la colonne des dizaines de ſols, on dira, 1 dizaine retenue, & 1 font 2, & 1 font 3, & 1 font 4; & comme 1 livre vaut 20 ſols ou 2 dizaines de ſols, on écrira zero ſous les dizaines de ſols, & l'on retiendra 2 livres.

tions, & l'on retiendra 1 pour l'ajouter avec les entiers, dont on fera l'addition à l'ordinaire, & l'on aura $120 + \frac{23}{70}$ pour la ſomme des nombres propoſés.

ARTICLE II.

Souſtraction des nombres compoſés.

PROBLÊME.

108. *Souſtraire un nombre compoſé d'un autre nombre ſimple ou compoſé.*

SOLUTION.

On écrira le nombre à ſouſtraire ſous le nombre dont on veut ſouſtraire, de maniere que les unités de même dénomination & de même degré ſoient les unes ſous les autres; enſuite, ayant tiré une barre au deſſous de ces nombres, pour les ſéparer de leur différence, on fera la ſouſtraction de chaque partie du nombre inférieur de chaque partie ſemblable du nombre ſupérieur, en commençant par les unités de la moindre valeur.

Lorſqu'une partie du nombre inférieur ſera plus grande que la partie correſpondante dans le nombre ſupérieur, on rendra la ſouſtraction poſſible, en ajoutant à la partie ſupérieure une unité de la valeur immédiatement plus grande, que l'on réduira aux unités de cette partie ſupérieure; puis de la ſomme de la partie ſupérieure & de l'unité ajoutée, on retranchera la partie inférieure; après quoi, pour augmenter également le nombre inférieur, on ajoutera dans ce même nombre inférieur, à la partie immédiatement ſuivante, une unité pareille à celle que l'on aura ajoutée dans le nombre ſupérieur.

EXEMPLE

EXEMPLE I.

Du nombre composé	224 liv.	11 f.	8 den.
retrancher le nombre	121	15	6
Différence	102 liv.	16 f.	2 den.

Commençant la ſouſtraction par les unités de la moindre valeur.

1°. On retranchera les 6 deniers du nombre inférieur des 8 deniers du nombre ſupérieur, il reſtera 2 deniers, que l'on écrira au deſſous de la barre, dans la colonne des deniers.

2°. Paſſant enſuite à la colonne des ſols, on aura 15 ſols à retrancher de 11 ſols, ce qui n'étant pas poſſible, on ajoutera à 11 ſols 1 livre, qui vaut 20 ſols, ce qui fera 31 ſols, dont on retranchera 15 ſols : il reſtera 16 ſols, que l'on écrira au deſſous de la barre, dans la colonne des ſols.

4°. On paſſera aux unités de livres ; & comme l'on a ajouté 1 livre au nombre ſupérieur, on ajoutera 1 au chiffre 1 des unités de livres dans le nombre inférieur, ce qui fera 2 livres ; puis on retranchera 2 de 4 ; il reſtera 2, que l'on écrira au deſſous de la barre, dans la colonne des unités de livres. On achevera la ſouſtraction comme on l'a expliqué pour les nombres entiers ſimples, & l'on trouvera la différence des nombres propoſés égale à 102 livres, 16 ſols, 2 deniers.

EXEMPLE II.

Du nombre ſimple	399 toiſ.	0 pi.	0 pouc.
retrancher le nombre compoſé	26	2	9
	372 toiſ.	3 pi.	3 pouc.

1°. Commençant la ſouſtraction par les unités de

la moindre valeur, l'on aura à retrancher 9 pouces de 0 pouces, ce qui n'étant pas poſſible, on ajoutera dans le nombre ſupérieur, à 0 pouces, 1 pied, qui vaut 12 pouces, dont on retranchera 9 pouces: il reſtera 3 pouces, que l'on écrira au deſſous de la barre, dans la colonne des pouces.

2°. Paſſant aux pieds, on ajoutera 1 pied aux 2 pieds du nombre inférieur, parce que l'on a ajouté un pied dans le nombre ſupérieur, & l'on aura 3 pieds à retrancher de 0 pieds, ce qui n'étant pas poſſible, on ajoutera dans le nombre ſupérieur, à 0 pieds, 1 toiſe, qui vaut 6 pieds, dont on retranchera les 3 pieds inférieurs; & il reſtera 3 pieds, que l'on écrira au deſſous de la barre, dans la colonne des pieds.

3°. Venant aux unités de toiſes, on ajoutera 1 au chiffre 6 des unités de toiſes, dans le nombre inférieur, ce qui fera 7 toiſes, que l'on retranchera des 9 toiſes ſupérieures: il reſtera 2 toiſes, que l'on écrira au deſſous de la barre, dans la colonne des toiſes, au rang des unités.

On achevera la ſouſtraction comme il a été expliqué, & l'on trouvera que la différence des nombres propoſés eſt égale à 372 toiſes 3 pieds 3 pouces.

EXEMPLE III.

Du nombre compoſé $356 + \frac{1}{3}$
retrancher le nombre compoſé $250 + \frac{2}{7}$

On commencera par réduire les fractions données à la même dénomination (n° 98.); & la ſouſtraction étant changée en celle-ci,

Du nombre compoſé $356 + \frac{7}{35}$
retrancher le nombre compoſé $250 + \frac{10}{35}$

$105 + \frac{27}{35}$

On aura d'abord la fraction $\frac{15}{35}$ à retrancher de $\frac{7}{35}$, ce qui n'étant pas poſſible, on ajoutera à la fraction ſupérieure une unité réduite en $\frac{35}{35}$, ce qui fera $\frac{42}{35}$, dont on retranchera $\frac{15}{35}$ (n° 101.), & il reſtera $\frac{27}{35}$, que l'on écrira au deſſous de la barre, dans la colonne des fractions.

Enſuite, comme l'on a ajouté dans le nombre ſupérieur 1 ou $\frac{35}{35}$, on ajoutera dans le nombre inférieur 1 au chiffre 0 des unités du nombre inférieur, ce qui fera 1, que l'on retranchera du chiffre 6 ſupérieur, & il reſtera 5, que l'on écrira au deſſous de la barre, dans la colonne des unités.

Achevant la ſouſtraction à l'ordinaire, on trouvera pour la différence des deux nombres propoſés $105 + \frac{27}{35}$.

EXEMPLE IV.

Du nombre ſimple	356 0
retrancher le nombre compoſé	250 $\frac{3}{7}$
Différence	105 $\frac{4}{7}$

1°. Commençant la ſouſtraction par les unités de moindre valeur, on aura à retrancher $\frac{3}{7}$ de $\frac{0}{7}$, ce qui n'étant pas poſſible, on ajoutera dans le nombre ſupérieur une unité réduite en $\frac{7}{7}$ (n° 89.); on retranchera enſuite $\frac{3}{7}$ de $\frac{7}{7}$ (101.).

Il reſtera $\frac{4}{7}$, que l'on écrira au deſſous de la barre.

2°. Paſſant à la colonne des unités des nombres entiers, on ajoutera 1 au chiffre 0, dans le nombre inférieur, parce que l'on a ajouté 1 ou la fraction $\frac{7}{7}$ dans le nombre ſupérieur, & l'on aura 1 à retrancher de 6, ce qui donnera le reſte 5, que l'on écrira au deſſous de la batre, dans la colonne des unités.

On achevera la ſouſtraction à l'ordinaire, & l'on trouvera que la différence de nombres propoſés eſt $105 + \frac{4}{7}$.

109. Que ſi l'on propoſoit de retrancher un nombre compoſé d'un entier & de pluſieurs fractions d'un nombre compoſé auſſi d'un entier & d'une ou de pluſieurs fractions, il faudroit commencer par faire la ſomme des fractions qui ſont partie du nombre dont on veut ſouſtraire, & de même faire la ſomme des fractions qui ſont partie du nombre à ſouſtraire, & l'on feroit enſuite la ſouſtraction ſelon les regles que l'on vient de donner pour ſouſtraire un nombre compoſé d'un entier, & d'une fraction d'un autre nombre compoſé d'un entier & d'une fraction.

REMARQUE.

110. *L'addition des nombres compoſés ſe prouve, comme l'addition des nombres ſimples* (44.), *par la ſouſtraction, & la ſouſtraction des nombres compoſés ſe prouve auſſi par l'addition, comme la ſouſtraction des nombres ſimples* (43.).

ARTICLE III.

De la Multiplication des nombres compoſés.

PROBLÊME.

Trouver le produit d'un nombre compoſé multiplié par un autre nombre ſimple ou compoſé.

PREMIER CAS DU PROBLÊME.

Multiplier un nombre compoſé par un nombre ſimple.

111. 1°. On ſuppoſera que le multiplicateur eſt un nombre repréſenté par un ſeul chiffre, & l'on propoſera la méthode ſuivante.

SOLUTION.

On fera la multiplication en commençant par la

partie du multiplicande, qui contient les unités de la moindre valeur ; & en allant de ſuite aux autres, on obſervera de réduire les produits particuliers aux unités immédiatement plus grandes, qu'ils contiennent pour les ajouter au produit de la partie ſuivante, qui a de ces unités immédiatement plus grandes.

EXEMPLE.

Multiplier le nombre compoſé	3134 liv.	8 ſ. 6 d.
par le nombre ſimple	9	
Produit	28209 liv.	16 ſ. 6 d.

Ayant écrit le multiplicateur ſous le multiplicande, & ayant tiré une barre au deſſous de ces nombres, pour les ſéparer du produit, on multipliera par le multiplicateur 9 toutes les parties du multiplicande, de cette ſorte.

1°. On multipliera les 6 deniers du multiplicande par le multiplicateur 9, ce qui produira 54 deniers, qui valent 4 fois 12 deniers ou 4 ſols, & 6 deniers de plus : on écrira donc 6 deniers au produit, au deſſous des deniers, & l'on retiendra 4 ſols pour les ajouter au produit des ſols.

2°. On multipliera les 8 ſols du multiplicande par le multiplicateur 9, ce qui produira 72 ſols, leſquels ajoutés au 4 ſols que l'on a retenus, font 76 ſols, qui valent 3 livres 16 ſols : on écrira donc 16 ſols dans la colonne des ſols, au deſſous de la barre, & l'on retiendra 3 livres pour les ajouter au produit des livres.

3°. On multipliera le chiffre 4 des unités de livres du multiplicande par le multiplicateur 9, ce qui produira 36 livres, leſquelles ajoutées aux 3 livres que l'on a retenues, font 39 livres, c'eſt-à-dire, 9 unités de livres & 3 dizaines de livres : on écrira 9 au deſſous

de la barre, au rang des unités de livres, & l'on retiendra 3 dizaines pour les ajouter au produit des dizaines.

On achevera la multiplication, ſelon les regles, que l'on a propoſées pour les nombres ſimples, & l'on aura le nombre 28209 livres 16 ſols 6 deniers pour le produit de la multiplication de 3134 livres 8 ſols 6 deniers par le nombre 9.

112. 2°. On ſuppoſera que le multiplicateur eſt un nombre entier ſimple, repréſenté par pluſieurs chiffres; & avant que de propoſer la maniere dont on fait cette multiplication, on expliquera ce que l'on entend par partie aliquote, & par partie aliquante.

Une quantité eſt dite partie *aliquote* d'une autre, lorſque la premiere eſt contenue dans la ſeconde un certain nombre de fois ſans reſte. Ainſi 5 ſols, 4 ſols, 2 ſols, &c. ſont des parties aliquotes de la livre, 5 ſols en étant exactement $\frac{1}{4}$, 4 ſols $\frac{1}{5}$, 2 ſols $\frac{1}{10}$.

Un diviſeur non exact d'une quantité eſt dit partie *aliquante* de cette quantité. Par exemple, 9 ſols & 12 ſols, &c. ſont des parties aliquantes de 1 livre, parce que ce nombre 9 & ce nombre 12 ne diviſent pas exactement 20 ſols, valeur de 1 livre.

On remarquera que les parties aliquantes d'une quantité peuvent ſe décompoſer en parties aliquotes de cette quantité. Par exemple, le nombre 9 ſols, qui eſt une partie aliquante de 1 livre, peut ſe décompoſer dans les parties 4 ſols & 5 ſols, qui ſont chacune aliquote de 1 livre. Cela poſé.

SOLUTION.

Lorſque le multiplicande ſera un nombre compoſé, & le multiplicateur un nombre ſimple, repréſenté par pluſieurs chiffres, on ne fera pas la multiplication

en commençant par la partie du multiplicande, dont les unités ſont de la moindre valeur, parce que la réduction des produits particuliers aux unités, immédiatement plus grande, ſeroit alors trop laborieuſe; mais on commencera par la partie du multiplicande, dont les unités ſeront de la plus grande valeur, en allant de ſuite aux autres.

La multiplication de la partie du multiplicande, dont les unités ſont les plus grandes, n'étant qu'une multiplication des nombres ſimples, elle ſe fera ſelon les regles que l'on a données à ce ſujet (n° 51.).

Pour multiplier la ſeconde partie du multiplicande, c'eſt-à-dire, celle dont les unités ſont les plus grandes après les unités de la premiere partie, on rapportera cette ſeconde partie à l'unité principale du multiplicande, c'eſt-à-dire, à l'unité de la premiere partie; & ſi elle en eſt une partie aliquote, on prendra une aliquote ſemblable du produit de l'unité principale, multiplié par le multiplicateur; & ſi elle en eſt une partie aliquante, on la réduira en parties aliquotes.

Pour multiplier la troiſieme partie du multiplicande par le multiplicateur, on rapportera cette partie à la ſeconde, & l'on diviſera le produit qu'a donné cette ſeconde proportionnellement à ce que cette troiſieme partie eſt à la ſeconde, & ainſi de ſuite.

Lorſque toutes les parties du multiplicande ſeront ainſi multipliées, on ajoutera enſemble les produits particuliers, & la ſomme qui viendra ſera le produit cherché.

Lorſqu'il manquera dans le multiplicande des unités intermédiaires, l'on ſuppoſera une ou pluſieurs de ces unités intermédiaires, leſquelles ſoient une aliquote de l'unité principale, ou de la partie qui les précede dans le multiplicande, & dont la partie qui les ſuivra ſoit auſſi une aliquote. On multipliera ces unités ſup-

posées par le multiplicateur ; & ayant distingué par des traits le produit de cette multiplication, pour marquer qu'il ne doit pas entrer dans le produit total, on divisera ce produit proportionnellement à ce que la partie suivante est à la partie supposée, & le quotient sera le produit de la multiplication de cette partie suivante.

EXEMPLE I.

Multiplier le nombre composé 53 toi. 4 pi. 6 pou. 9 l.
par le nombre simple 22

Produits de 53 toiſ. par 22	1166 toi.		
de 3 pieds par 22	11		
de 1 pied par 22	3	4 pi.	
de 6 pouc. par 22	1	5	
de 9 lignes par 22	0	1	4 pou. 6 l.
Produit total	1182 toi.	4 pi.	4 pou. 6 l.

Le multiplicateur étant écrit ſous le multiplicande, on multipliera ſucceſſivement les toiſes, les pieds, les pouces, les lignes du multiplicande par le multiplicateur 22, comme il ſuit.

1°. On multipliera les 53 toiſes du multiplicande par 22, ce qui donnera en tout, pour les deux produits, 1166 toiſes, que l'on écrira comme on le voit dans l'exemple.

2°. Pour multiplier la ſeconde partie 4 pieds du multiplicande par le multiplicateur 22, on partagera les 4 pieds en parties aliquotes de l'unité principale du multiplicande, c'eſt-à-dire, de la toiſe : ces parties ſont 3 pieds & 1 pied, dont la premiere 3 pieds eſt la moitié de la toiſe, & la ſeconde 1 pied eſt le ſixieme de la toiſe, ou $\frac{1}{3}$ de 3 pieds.

Pour avoir le produit de 3 pieds par 22, on remar-

quera que l'unité principale, à ſçavoir 1 toiſe, étant multipliée par 22, donnera 22 toiſes, d'où l'on conclura que la moitié de la toiſe ou 3 pieds, étant multipliée par 22, ne doit donner que la moitié de 22 toiſes, c'eſt-à dire, 11 toiſes: on écrira 11 toiſes pour le produit de 3 pieds.

Pour avoir le produit de 1 pied par le multiplicateur 22, on remarquera que 1 pied eſt le $\frac{1}{3}$ des 3 pieds qui ont produit 11 toiſes, & l'on conclura que le produit de 1 pied eſt le tiers du produit 11 toiſes, qui eſt 3 toiſes 4 pieds; car le tiers de 11 toiſes eſt 3 toiſes, & il reſte 2 toiſes qui valent 12 pieds, dont le tiers eſt 4 pieds: on écrira donc 3 toiſes 4 pieds, comme on le voit dans l'exemple.

3°. Pour multiplier la troiſieme partie 6 pouces du multiplicande par le multiplicateur 22, on remarquera que 6 pouces ſont la moitié de 1 pied, qui a produit 3 toiſes 4 pieds, & l'on conclura que 6 pouces multipliés par le même multiplicateur 22, produiront la moitié de 3 toiſes 4 pouces, & cette moitié eſt 1 toiſe 5 pouces, que l'on écrira comme on le voit dans l'exemple.

4°. Pour multiplier la quatrieme partie 9 lignes du multiplicande par le multiplicateur 22, on remarquera que 9 lignes ſont la huitieme partie de 6 pouces, qui valent 6 fois 12 lignes ou 72 lignes, & qui ont produit 1 toiſe 5 pieds, & l'on conclura que le produit de 9 lignes par le même multiplicateur 22 eſt $\frac{1}{8}$ de 1 toiſe 5 pieds, c'eſt-à-dire, 1 pied 4 pouces 6 lignes; car 1 toiſe, qui vaut 6 pieds, étant ajoutée à 5 pieds, on aura 11 pieds, dont le $\frac{1}{8}$ eſt 1 pied avec 3 pieds de reſte. Ces 3 pieds étant réduits en pouces, font 36 pouces, dont le $\frac{1}{8}$ eſt 4 pouces avec 4 pouces de reſte, qui valent 48 lignes, dont le $\frac{1}{8}$ eſt 6 lignes; on écrira donc 1 pied 4 pouces 6 lignes, comme on le voit dans l'exemple.

5°. Toutes les parties du multiplicande étant ainſi multipliées, on ajoutera enſemble les produits particuliers, & la ſomme 1182 toiſes 4 pieds 4 pouces 6 lignes ſera le produit total cherché.

EXEMPLE II.

Multiplier	94 toi.	0 pi.	3 pou.	1 l.
par.	32			
	188 toi.			
Prod. de 94 toiſes par 32	2820.			
Suppoſé de 1 pied par 32	9	2 pi.		
3 pouces par 32	1	2		
Suppoſé de 1 pou. par 32	0	2	8 pou.	
1 ligne par 32	0	0	2	8 l.
Produit total	3009 toi.	2 pi.	2 pou.	8 l.

1°. On multipliera la premiere partie 94 toiſes du multiplicande par le multiplicateur 32, ce qui donnera les deux produits 188 toiſes, 2820 toiſes, que l'on écrira comme on le voit dans l'exemple.

2°. Pour multiplier les 3 pouces du multiplicande par le multiplicateur 32, on pourroit, en rapportant les 3 pouces à la toiſe, qui vaut 72 pouces, & dont par conſéquent 3 pouces ſont $\frac{1}{24}$, prendre la vingt-quatrieme partie de 32 toiſes, que produiroit 1 toiſe multipliée par 32 : mais il ſera plus court de ſuppoſer dans le multiplicande une partie intermédiaire, c'eſt-à-dire, un nombre de pieds aliquotes de 1 toiſe, & dont les 3 pouces ſoient auſſi une partie aliquote.

On ſuppoſera, par exemple, 1 pied, qui eſt le $\frac{2}{6}$ de la toiſe, & dont 3 pouces ſont $\frac{1}{4}$, on fera le produit de 1 pied ſuppoſé, multiplié par le multiplicateur 32, en prenant le $\frac{1}{6}$ du nombre 32 toiſes, que produiroit 1 toiſe multipliée par 32, & ce $\frac{1}{6}$ eſt

5 toiſes 2 pieds, que l'on marquera par des traits, pour qu'on ne les faſſe pas entrer dans le produit total.

Enſuite on prendra le $\frac{1}{4}$ de ce produit ſuppoſé 5 toiſes 2 pieds pour le produit de 3 pouces, & ce $\frac{1}{4}$ eſt 1 toiſe 2 pieds, que l'on écrira comme on le voit dans l'exemple.

3°. Pour multiplier la troiſieme partie 1 ligne du multiplicande par le multiplicateur 32, on pourroit, en rapportant 1 ligne à 3 pouces, qui valent 36 lignes, & dont par conſéquent 1 ligne eſt $\frac{1}{36}$, prendre la trente-ſixieme partie de 1 toiſe 2 pieds qu'ont produit les 3 pouces: mais il ſera plus aiſé de faire un faux produit pour 1 pouce, en prenant le $\frac{1}{3}$ du produit que 3 pouces ont donné; & ce tiers étant trouvé de 2 pieds 8 pouces, on prendra pour le produit de 1 ligne multipliée par 32, la douzieme partie 2 pieds 8 pouces, ce qui produira 2 pouces 8 lignes; car 2 pieds ne pouvant ſe diviſer par 12, on les réduira en 24 pouces, auxquels, ſi on ajoute la ſeconde partie du faux produit 8 pouces, on aura 32 pouces, dont la douzieme partie eſt 2 pouces avec 8 pouces de reſte, qui valent 96 lignes, dont la douzieme eſt 8 lignes.

4°. Toutes les parties du multiplicande étant ainſi multipliées, on ajoutera enſemble les produits réels, & l'on aura pour produit total 3009 toiſes 2 pieds 2 pouces 8 lignes.

EXEMPLE III.

On propoſe de multiplier	64 l.	0 ſ. 8 d.
par.	32	
Ayant diſpoſé ces nombres	64 l.	0 ſ. 8 d.
comme on le voit.	32	
Produits de 64 livres par 32	128 l.	
	192.	
Suppoſé de 2 ſols par 32	3	4 ſ.
8 deniers par 32	1	1 4 d.
Produit total	2049 l.	1 ſ. 4 d.

1°. On multipliera les 64 livres du multiplicande par le multiplicateur 32, ce qui donnera les deux produits 128, 1920, que l'on écrira comme on le voit dans l'exemple.

2°. Pour multiplier les 8 deniers du multiplicande par le multiplicateur 32, on ſuppoſera dans le multiplicande la partie intermédiaire 2 ſols, qui eſt la $\frac{1}{10}$ de la livre, & dont 8 deniers ſont le tiers.

On fera le produit de 2 ſols ſuppoſés, en prenant le dixieme du produit 32 livres, qu'eût donné une livre multipliée par 32, & l'on trouvera que cette dixieme partie eſt de 3 livres 4 ſols.

Enſuite on prendra pour le produit des 8 deniers le tiers du faux produit 3 livres 4 ſols, & l'on trouvera que le tiers eſt 1 livre 1 ſol 4 deniers.

3°. Toutes les parties du multiplicande étant ainſi multipliées, on ajoutera enſemble tous les produits réels, & la ſomme 2009 livres 1 ſol 4 deniers ſera le produit cherché.

SECOND CAS DU PROBLÊME.

113. *Multiplier un nombre compoſé par un nombre auſſi compoſé.*

SOLUTION.

On multipliera le multiplicande par la premiere partie, c'eſt-à-dire, par les unités principales du multiplicateur, & cette multiplication ſe fera ſelon les regles que l'on a ſuivies dans les exemples du premier cas de ce problême (n°. 111, 112.).

Pour multiplier le multiplicande par la ſeconde partie du multiplicateur, on imaginera le multiplicande multiplié par l'unité principale du multiplicateur; on diviſera le produit proportionnellement à ce que la ſeconde partie du multiplicateur ſera à l'égard de l'unité principale de ce même multiplicateur, & le quotient ſera le produit du multiplicande multiplié par la ſeconde partie du multiplicateur.

On diviſera ce dernier produit proportionnellement à ce que la troiſieme partie du multiplicateur eſt à l'égard de la ſeconde, & le quotient ſera le produit de la multiplication par la troiſieme partie du multiplicateur, & ainſi de ſuite.

Lorſque le multiplicande ſera multiplié par toutes les parties du multiplicateur, on ajoutera les produits particuliers, & la ſomme qui viendra ſera le produit total cherché.

Lorſqu'il manquera dans le multiplicateur des unités intermédiaires, on ſuppoſera une ou pluſieurs de ces unités intermédiaires, qui ſoient une partie aliquote de l'unité principale, ou de la partie qui les précede dans le multiplicateur, & dont la partie qui les ſuivra ſoit auſſi une partie aliquote. On multipliera le multiplicande par ces unités ſuppoſées; & en ayant diſtingué le produit par des traits, pour marquer qu'il ne doit pas entrer dans le produit total, on prendra ſur ce faux produit celui de la multiplication par la partie du multiplicateur, qui ſuivra la partie ſuppoſée.

EXEMPLE I.

Multiplier.		40 l.	9 f.	8 d.	
par.		34	$\frac{1}{3}$		
Produits du multiplicande par 34	40 l. par 34	160 l.			
		120.			
	5 f. par 34	8	10 f.		
	4 f. par 34	6	16		
	8 d. par 34	1	2	8 d.	
Produit du multiplicande par $\frac{1}{3}$ . .		13	9	10	$\frac{2}{3}$
Produit total		1389 l.	18 f.	6 d.	$\frac{2}{3}$

1°. On multipliera, comme il a été expliqué dans la ſolution du premier cas du problème (n° 112), le multiplicande entier 40 livres 9 ſols 8 deniers par la premiere partie du multiplicateur, ſçavoir, par 34, ce qui donnera les produits marqués dans l'exemple.

2°. Pour multiplier le multiplicande entier par la partie $\frac{1}{3}$ du multiplicateur, on conſidérera que ſi l'on avoit 40 livres 9 ſols 8 deniers à multiplier par 1, l'on auroit pour produit le multiplicande 40 livres 9 ſols 8 deniers.

D'où l'on conclura que, pour multiplier par $\frac{1}{3}$, il faut prendre le tiers du multiplicande 40 livres 9 ſols 8 deniers. En faiſant l'opération, on trouvera que le tiers eſt 13 livres 9 ſols 10 deniers $+\frac{2}{3}$; car le tiers de 30 livres eſt 13 livres, & il reſte 1 livre, laquelle, ajoutée à 9 ſols, fait 29 ſols, dont le tiers eſt 9 ſols, & il reſte 2 ſols, qui avec les 8 deniers ſont 32 deniers, dont le tiers eſt 10 deniers $+\frac{2}{3}$.

3°. Toutes les parties du multiplicande étant ainſi multipliées par toutes les parties du multiplicateur, l'on ajoutera enſemble les produits particuliers, & l'on aura 1389 livres 18 ſols 6 deniers $\frac{2}{3}$ deniers pour le produit cherché.

EXEMPLE II.

Le prix d'un marc d'argent façonné, étant ſuppoſé de 54 livres 12 ſols 6 deniers, déterminer le prix de 24 marcs, 3 onces, 4 gros.

Pour ſatisfaire à la queſtion,

on multipliera	54 liv.	12 ſols.	6 d.
par.	24 marcs	3 onc.	4 gr.

Produits du multiplicande par 24 marcs.	54 l. × 24	216 liv.			
		108.			
	10 ſ. × 24	12			
	2 ſ. × 24	2	8 ſols		
	6 d. × 24	0	12		
	par 2 onces	13	13	1 d.	$\frac{2}{3}$
	par 1 once	6	16	6	$\frac{1}{3}$
	par 4 onces	3	8	3	$\frac{1}{8}$
Produit total		1334 liv.	17 ſ.	11 d.	$\frac{1}{8}$

1°. On multipliera toutes les parties du multiplicande par la partie 24 du multiplicateur, ce qui donnera les produits marqués dans l'exemple.

2°. Pour multiplier le multiplicande par la ſeconde partie du multiplicateur 3 onces, on partagera les 3 onces en parties aliquotes de l'unité principale du multiplicateur, c'eſt-à-dire, du marc. Ces parties ſont 2 onces, qui ſont le $\frac{1}{4}$ du marc, & 1 once, qui eſt le $\frac{1}{8}$ du marc, & la moitié de 2 onces.

Enſuite, pour avoir le produit du multiplicande par 2 onces, on remarquera que le prix du marc étant tout le multiplicande 54 livres 12 ſols 6 deniers, le prix des 2 onces, c'eſt-à-dire, le produit du multiplicande par 2 onces, qui ſont $\frac{1}{4}$ du marc, doit être le quart du multiplicande 54 livres 12 ſols 6 deniers, & ce quart eſt 13 livres 13 ſols 1 denier $+\frac{2}{4}$.

Le prix de 1 once, ou le produit du multiplicande par 1 once, étant évidemment la moitié du produit fait par les 2 onces, ſera 6 livres 16 ſols 6 deniers $\frac{3}{4}$.

3°. Pour multiplier le multiplicande par la troiſieme partie 4 gros du multiplicateur, on remarquera que le gros étant la moitié de 1 once, le produit de la multiplication par 4 onces doit être la moitié du produit de la multiplication par 1 once, c'eſt-à-dire, la moitié de 6 livres 16 ſols 6 deniers $\frac{3}{4}$, & cette moitié eſt 3 livres 8 ſols 3 deniers $\frac{3}{8}$.

4°. Toutes les parties du multiplicande étant multipliées de cette ſorte par toutes celles du multiplicateur, l'on ajoutera enſemble les produits particuliers, & l'on trouvera le produit total de 1334 livres 17 ſols 10 deniers $+\frac{5}{8}$.

EXEMPLE III.

Le prix de 1 toiſe de maçonnerie étant ſuppoſé de 12 livres 7 ſols 8 deniers, déterminer le prix de 22 toiſes 4 pouces.

Pour ſatisfaire à la queſtion, on multipliera	12 liv.	7 ſ.	8 den.	
par	22 toiſ.	0 pi.	4 pou.	
Produits du multiplicande par 22 toiſes. 12 l. × 22	24 liv.			
	24.			
5 ſ. × 22	5	10 ſ.		
2 ſ. × 22	2	4		
8 d. × 22	0	14	8 den.	
Suppoſé par 1 pied	2	1	3 $+\frac{1}{3}$	
par 4 pouces	0	13	9 $\frac{1}{9}$	
Produit total	273 liv.	2 ſ.	5 d. $\frac{1}{9}$	

1°. On multipliera le multiplicande par la premiere partie 22 toiſes du multiplicateur, ce qui donnera les produits marqués dans l'exemple. 2°.

2°. Pour multiplier le multiplicande par les 4 pouces du multiplicateur, on pourroit, en rapportant 4 pouces à la toiſe qui en vaut 72, & dont par conſéquent 4 pouces ſont $\frac{1}{18}$, prendre la dix-huitieme partie de 12 liv. 7 ſols 8 den. le prix de 1 toiſe; mais il ſera plus aiſé de ſuppoſer dans le multiplicateur une partie intermédiaire : on ſuppoſera, par exemple, 1 pouce qui eſt $\frac{1}{6}$ à l'égard de la toiſe, & dont les 4 pouces du multiplicateur ſont $\frac{1}{3}$; on multipliera le multiplicande par 1 pouce, en prenant le $\frac{1}{6}$ de 12 livres 7 ſols 8 den. ce $\frac{1}{6}$ eſt 2 liv. 1 ſ. 2 d. $+\frac{1}{3}$, puis on prendra pour le produit du multiplicande par 4 pouces, le tiers de 2 livres 1 ſ. 3 den. $+\frac{1}{3}$, ce tiers eſt 3 ſ. 9 den. $+\frac{1}{9}$.

3°. Toutes les parties du multiplicande étant ainſi multipliées par toutes les parties du multiplicateur, on ajoutera enſemble tous les produits réels, & la ſomme 273 liv. 2 ſols 5 den. $+\frac{1}{9}$, ſera le produit cherché.

ARTICLE IV.

Diviſion compoſée.

PROBLÊME.

Trouver le quotient de la diviſion d'un nombre compoſé diviſé par un autre nombre ſimple ou compoſé.

PREMIER CAS DU PROBLÊME.

114. *Diviſer un nombre compoſé par un nombre ſimple.*

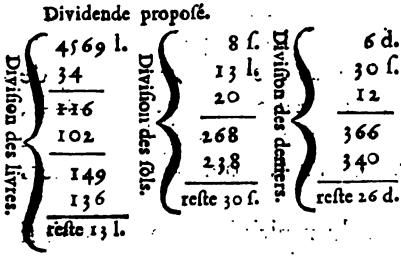
SOLUTION.

On diviſera chaque partie du dividende par le diviſeur ſimple donné, en commençant par la partie du dividende dont les unités ſont les plus grandes,

& obſervant de réduire le reſte de chaque diviſion aux unités de la partie ſuivante, pour les ajouter à cette partie, & continuer la diviſion.

EXEMPLE I.

Diviſer le nombre compoſé 4569 liv. 8 ſ. 6 den. par 34.



Le dividende & le diviſeur étant diſpoſés comme on le voit dans l'exemple,

1°. On diviſera la partie 4569 liv. par le diviſeur 34, ce qui n'eſt qu'une diviſion ſimple, & l'on trouvera 134 livres pour la premiere partie du quotient cherché, avec 13 liv. de reſte.

2°. On réduira en ſols le reſte de 13 liv. de la premiere diviſion, en les multipliant par 20 ſols; ce qui donnera 268 ſols avec les 8 ſols qui ſont au dividende, 268 ſols ſera un ſecond dividende ſimple à diviſer par le diviſeur 34, en faiſant la diviſion on trouvera 7 ſols pour la ſeconde partie du quotient, avec 30 ſols de reſte.

3°. On réduira en deniers les 30 ſols qui reſtent de la ſeconde diviſion, en multipliant les 30 ſols par 12; ce qui donnera 360 deniers, auxquels on ajoutera les 6 deniers qui ſont au dividende; & l'on aura 366 deniers pour un nouveau dividende ſimple à diviſer par le diviſeur 34; en faiſant la diviſion on

trouvera 10 den. pour la troiſieme partie du quotient cherché, & il reſtera 26 den. dont on fera la fraction $\frac{26}{34} = \frac{13}{17}$ de deniers. Toutes les parties du dividende étant ainſi diviſées par le diviſeur 34, on aura le nombre 134 liv. 7 ſ. 10 den. $\frac{26}{34}$, pour le quotient cherché.

EXEMPLE II.

Diviſer le nombre compoſé $34 + \frac{2}{5}$ par le diviſeur ſimple 12.

Dividende $34 + \frac{2}{5}$ | 12, diviſeur.

$10 \quad 10$ | $2 + \frac{12}{60}$, quotient.

5

$\frac{52}{5}$

1°. On diviſera la premiere partie 34 du dividende par le diviſeur 12, & l'on trouvera 2 pour la premiere partie du quotient cherché, & il reſtera 10.

2°. Comme les unités de la ſeconde partie du dividende ſont des cinquiemes, on réduira en cinquiemes le reſte 10 de la premiere diviſion; ce qui donnera (n°. 89) la fraction $\frac{10 \times 5}{5} = \frac{50}{5}$, à laquelle, ſi on ajoute (100), la fraction $\frac{2}{5}$ qui ſe trouve dans le dividende propoſé, on aura le nouveau dividende $\frac{52}{5}$ à diviſer par le diviſeur 12: on fera cette diviſion en multipliant le dénominateur 5 par le diviſeur 12 (n°. 94); ce qui donnera pour la ſeconde partie du quotient, la fraction $\frac{52}{5 \times 12} = \frac{52}{60}$, laquelle étant réduite à ſes moindres termes devient $\frac{13}{15}$.

Ainſi le quotient de la diviſion propoſée eſt $2 + \frac{13}{15}$.

Lorſque le dividende ſera compoſé d'un entier & de pluſieurs fractions, on commencera par faire la ſomme de toutes les fractions qui ſeront au di-

videndé ; puis le dividende étant réduit à un nombre composé d'un entier & d'une fraction, on fera la diviſion comme dans l'exemple précédent.

SECOND CAS DU PROBLÊME.

115. *Diviſer par un nombre composé.*

SOLUTION.

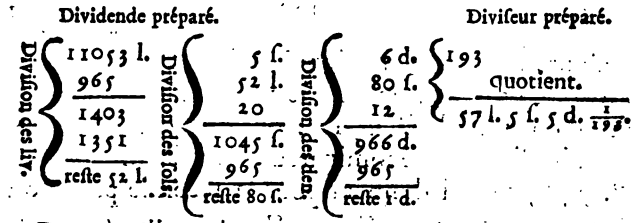
On réduira le diviſeur en un nombre ſimple en le multipliant par des nombres propres à faire diſparoître ſes unités moindres que l'unité principale ; & pour ne rien changer au quotient, on multipliera toutes les parties du dividende par les mêmes nombres, par leſquels on aura multiplié le diviſeur (n°. 58).

Le diviſeur étant ainſi devenu un nombre ſimple, la diviſion ſe fera comme dans le cas précédent.

EXEMPLE I.

Diviſer 3684 liv. 8 ſ. 6 den. par $64+\frac{1}{3}$.

Dividende propoſé 3684 l. 8 ſ. d. $\{$ $64+\frac{1}{3}$ diviſeur.



Comme le diviſeur renferme deux ſortes d'unités, à ſavoir 64 unités entieres, & $\frac{1}{3}$ d'unité, on le multipliera par 3, pour faire diſparoître la fraction $\frac{1}{3}$, & l'on aura le diviſeur ſimple 193.

Mais le diviſeur 193 étant triple du diviſeur $64+\frac{1}{3}$, il faut, pour que le quotient qui viendra en diviſant par 193, ſoit le même que celui que l'on

auroit eu en diviſant par $64 + \frac{1}{3}$, prendre un dividende auſſi triple du dividende propoſé ; on multipliera donc par 3 toutes les parties du dividende 3684 liv. 8 ſ. 6 den. ce qui donnera le nouveau dividende 11053 liv. 5 ſ. 6 den.

Le dividende & le diviſeur étant ainſi préparés & diſpoſés, comme on le voit dans l'exemple, on diviſera par le diviſeur 193 toutes les parties du dividende préparé, comme on l'a fait dans les exemples du premier cas du problême, & le quotient 57 liv. 5 ſ. 5 den. $+ \frac{1}{193}$, que donnera cette diviſion, ſera auſſi le quotient du dividende 3684 liv. 8 ſ. 6 den. diviſé par $64 + \frac{1}{3}$; parce que ce dividende & le diviſeur donnés ont été multipliés par le même multiplicateur.

EXEMPLE II.

Suppoſant que l'on a donné 3594 liv. 5 ſ. 8 den. pour 48 marcs, 4 onces, 4 gros d'argent travaillé, déterminer le prix du marc.

On ſatisfera à cette queſtion par la diviſion ſuivante.

Dividende propoſé. Diviſeur propoſé.

3594 liv. 5 ſ. 8 den. { 48 M. 4 ℥ 4 ⅀

Réſultat de la multiplication par 2.

7188 liv. 11 ſ. 4 den. { 97 M. 1 ℥

Réſultat de la multiplication par 8.

Dividende préparé. Diviſeur préparé.

Diviſion des liv. 57508 l. / 5439 / 3118 / 3108 / reſte 10 l.

Diviſ. des ſols. 10 ſ. / 10 l. / 20 / reſt. 210 ſ.

Diviſion des deniers. 8 d. / 210 ſ. / 12 / 2528 / 2331 / reſte 197 d.

777 quotient.

74 l. 0 ſ. 3 d. $+ \frac{227}{777}$.

Comme le diviſeur eſt un nombre compoſé de marcs, d'onces & de gros, on le rendra un nombre ſimple de marcs, en faiſant diſparoître les gros & les onces. Pour faire diſparoître les gros, on remarquera que 4 gros ſont la moitié de l'once; ainſi on multipliera le diviſeur donné par 2, pour avoir le nouveau diviſeur 97 marcs, 1 once, lequel ne renfermera plus de gros; &, pour ne rien changer au quotient, on multipliera auſſi par 2 le dividende donné: ce qui donnera le nouveau dividende 7188 liv. 11 ſ. 4 den.

Comme le nouveau diviſeur eſt encore compoſé de marcs & d'onces, on fera diſparoître 1 once en multipliant tout le diviſeur par 8, parce qu'il faut 8 onces pour faire un marc, & l'on aura le diviſeur ſimple 777 marcs. Pour ne rien changer au quotient, on multipliera encore par 8 le nouveau dividende 7188 liv. 11 ſ. 4 den. ce qui donnera le dividende préparé 57508 liv. 10 ſols 8 den. Cette préparation étant faite, on diviſera le dividende préparé 57508 l. 10 ſ. 8 den. par le diviſeur préparé 777, & le quotient 74 liv. 0 ſ. 3 den. $\frac{197}{777}$, que donnera cette diviſion, ſera auſſi le quotient cherché de la diviſion du dividende donné 3594 liv. 5 ſ. 8 den. par le diviſeur donné 48 marcs, 4 onces, 4 gros.

Parce que le dividende & le diviſeur donnés ont été multipliés par les mêmes nombres (n°. 58).

REMARQUE.

116. 1°. *On pourra, pour prouver la multiplication compoſée, diviſer le produit par le multiplicateur,* (114, 115) *& l'on connoîtra que la multiplication a été bien faite, lorſque le quotient ſera égal au multiplicande* (67). *Mais il ſera plus ſimple de multiplier le double du multiplicande par la moitié du multiplicateur, étant évident que le produit de cette ſeconde multipli-*

cation doit être égal au produit de la premiere, ſi on ne s'eſt point trompé dans cette premiere.

2°. On pourra, pour prouver la diviſion compoſée, multiplier le quotient par le diviſeur, (111, 112, 113) *& l'on reconnoîtra que la diviſion a été bien faite, lorſque le produit de cette multiplication ſera égal au dividende.*

Mais il ſera plus aiſé de diviſer la moitié ou le tiers du dividende par la moitié ou le tiers du diviſeur: car ſi le quotient de cette diviſion eſt égal au premier quotient, l'on conclura que la premiere diviſion s'eſt faite ſans aucune erreur. (n°. 61).

CHAPITRE SIXIEME.

La formation des Quarrés & des Cubes, l'extraction de leurs racines, & les produits des Grandeurs multipliées les unes par les autres, & par elles-mêmes.

SECTION PREMIERE.

Définition & formation des Quarrés & des Cubes.

ARTICLE I.

DÉFINITIONS.

117. LE *quarré* ou *la ſeconde puiſſance* d'une grandeur, c'eſt le produit de cette grandeur multipliée par elle-même une fois.

Le cube ou *la troiſieme puiſſance* d'une grandeur, c'eſt le produit de cette grandeur multipliée par elle-même deux fois ſucceſſivement, ou le produit du quarré de cette grandeur multiplié une fois par cette grandeur; en général *les puiſſances* d'une grandeur ſont les différens produits ou degrés auxquels elle s'éleve en ſe multipliant par elle-même une ou pluſieurs fois ſucceſſivement; & la premiere puiſſance d'une grandeur, c'eſt cette grandeur même ſans être multipliée.

On nomme *expoſant d'une puiſſance* le nombre qui marque le degré de cette puiſſance : l'expoſant de la premiere puiſſance eſt 1, & il n'eſt jamais exprimé; l'expoſant de la ſeconde puiſſance ou du

quarré eſt le nombre 2 ; celui de la troiſieme eſt 3, &c.

On voit donc que l'expoſant d'une puiſſance déſigne le nombre de fois, moins une, qu'une grandeur a été multipliée par elle-même pour produire cette puiſſance.

La racine quarrée d'une grandeur, c'eſt la quantité qui, en ſe multipliant par elle, a produit cette grandeur.

La racine cubique d'une grandeur, c'eſt la quantité qui, en ſe multipliant par elle-même deux fois ſucceſſivement, a produit cette grandeur.

On nomme *expoſant d'une racine* le nombre qui marque le degré de cette racine : l'expoſant de la racine quarrée eſt 2, celui de la racine cubique ou troiſieme eſt 3, &c.

En général, la racine quelconque d'une grandeur, c'eſt la quantité qui, en ſe multipliant par elle-même autant de fois, moins une, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de cette racine, a produit cette grandeur.

Extraire la racine quarrée d'une grandeur, c'eſt trouver la quantité qui, multipliée par elle-même, produit une grandeur égale à celle qui eſt propoſée, pour en extraire la racine quarrée.

On nomme *quarré parfait* la grandeur qui eſt réellement produite par la multiplication d'une quantité par elle-même, & dont par conſéquent il eſt poſſible d'extraire la racine quarrée exactement.

On nomme *quarré imparfait* la grandeur qui n'eſt pas le juſte produit de la multiplication d'une quantité par elle-même, & dont par conſéquent il n'eſt pas poſſible d'extraire la racine quarrée exactement, mais ſeulement celle du plus grand quarré qu'elle contient.

Extraire la racine cubique d'une grandeur, c'eſt trouver la grandeur qui, multipliée par elle-même

deux fois ſucceſſivement, produit une grandeur égale à celle qui eſt propoſée, pour en extraire la racine cubique.

On nomme *cube parfait* la grandeur qui eſt le juſte produit d'une quantité multipliée par elle-même deux fois ſucceſſivement, & dont par conſéquent il eſt poſſible d'extraire exactement la racine cubique.

On nomme *cube imparfait* la grandeur qui n'eſt pas le juſte produit d'une quantité multipliée par elle-même deux fois ſucceſſivement, & dont par conſéquent on ne peut extraire exactement la racine cubique: on ſe borne alors à extraire celle du plus grand cube contenu dans la grandeur propoſée.

ARTICLE II.

Formation des Quarrés & des Cubes.

PROBLÊME.

118. *Elever une grandeur quelconque au quarré ou au cube.*

SOLUTION.

Le quarré d'une grandeur, c'eſt le produit de cette grandeur multipliée par elle-même une fois; & ſon cube, c'eſt le produit du quarré multiplié par cette grandeur elle-même (n°. 117).

Donc, 1°. pour élever au quarré une grandeur algébrique incomplexe, il faudra la multiplier une fois par elle-même, & pour avoir ſon cube, il faudra multiplier le quarré par cette grandeur elle-même.

Par exemple, le quarré de $2ab = 2ab \times 2ab = 4aabb = 4a^2b^2$, en ſe contentant d'indiquer la multiplication des lettres par le moyen de l'expoſant 2 du quarré.

Et le cube de $2ab$ = le quarré $4aabb$ multiplié

par la grandeur $2ab = 8aaabbb = 8a^3b^3$, en ſe contentant d'indiquer le cube des lettres par le moyen de l'expoſant 3 du cube.

On propoſera donc cette regle. Pour élever un monome, par exemple, $2ab$ à ſon quarré, on fera un nouveau monome $4a^2b^2$, dont le coefficient ſoit le quarré du coefficient du monome propoſé, & dont les lettres ſoient celles du monome propoſé, affectées chacune de l'expoſant 2 du quarré; & pour élever un monome, par exemple, $2ab$ au cube, on fera un nouveau monome $8a^3b^3$, dont le coefficient ſoit le cube du coefficient du monome propoſé, & dont les lettres ſoient celles du monome propoſé, affectées chacune de l'expoſant 3 du cube.

On ſuppoſe dans ce Chapitre que les lettres que l'on ſe propoſe d'élever au quarré ou au cube, n'ont pas d'autre expoſant que l'unité qui eſt ordinairement ſous-entendue; on donnera dans la ſuite des regles pour élever à une puiſſance quelconque les grandeurs incomplexes, affectées d'un expoſant quelconque.

2°. Pour élever au quarré une grandeur algébrique complexe, il faudra la multiplier une fois par elle-même; & pour avoir ſon cube, il faudra multiplier le quarré de cette grandeur par cette grandeur elle-même. Par exemple, le quarré de la grandeur $a+b = \overline{a+b} \times \overline{a+b} = a^2+2ab+b^2$, & le cube de $a+b = \overline{a^2+2ab+b^2} \times \overline{a+b} = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

3°. Pour élever un nombre au quarré, il faudra le multiplier une fois par lui-même; & pour avoir le cube, il faudra multiplier le quarré de ce nombre par le nombre même. Par exemple, le quarré de $12 = 12 \times 12 = 144$, & le cube de $12 = 144 \times 12 = 1728$.

4°. Pour élever une fraction quelconque, algébrique ou numérique au quarré, il faudra faire une nouvelle fraction, dont le numérateur ſoit le quarré du numérateur de la fraction propoſée, & dont le dénominateur ſoit le quarré du dénominateur de cette même fraction propoſée. Et pour élever une fraction au cube, on fera le cube du numérateur, & celui du dénominateur de la fraction propoſée. Par exemple, le quarré de la fraction $\frac{2a}{3b} = \frac{2a \times 2a}{3b \times 3b} = \frac{4a^2}{9b^2}$, & le cube de la même fraction $\frac{2a}{3b} = \frac{2a \times 2a \times 2a}{3b \times 3b \times 3b} = \frac{8a^3}{27b^3}$.

SECTION II.

Extraction des Racines quarrées.

ON propoſera d'extraire la racine quarrée.

1°. D'un quarré algébrique incomplexe.

2°. Celle d'un quarré algébrique complexe.

3°. Celle d'un nombre exprimé par plus de deux chiffres, ou celle du plus grand quarré contenu dans ce nombre, lorſqu'il ne ſera pas un quarré imparfait.

4°. Celle d'une fraction.

On donnera enſuite la manière de connoître ſi la racine quarrée extraite d'un nombre qui n'eſt pas un quarré parfait, ne pourroit pas être augmentée de l'unité.

Enfin on terminera par donner la méthode d'approcher de ſi près que l'on voudra de la racine quarrée d'un nombre qui n'eſt pas quarré parfait.

119. Comme les regles, pour extraire la racine quarrée, ſuppoſent que l'on connoît les quarrés des nombres repréſentés par un ſeul chiffre, on donnera ici ces quarrés au deſſous de leurs racines.

Racines.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Quarrés.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.

Et l'on remarquera que cette table ſuffit pour déterminer la racine quarrée de tout nombre exprimé par moins de trois chiffres, ou la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans ce nombre.

Car le plus petit nombre exprimé par trois chiffres étant 100, & ſa racine quarrée étant 10, puiſque $10 \times 10 = 100$, il eſt évident qu'un nombre moindre que 100, & par conſéquent exprimé par moins de trois chiffres, aura pour ſa racine, ou pour celle du plus grand quarré qu'il contient, un nombre moindre que 10; c'eſt-à-dire, un nombre exprimé par un ſeul chiffre.

Donc, puiſque la table que l'on vient de donner renferme les quarrés de toutes les racines exprimées par un ſeul chiffre, elle ſuffira pour connoître les racines quarrées des nombres exprimés par moins de trois chiffres, ou les racines quarrées des plus grands quarrés contenus dans ces nombres.

ARTICLE I.

PROBLÈME.

120. *Extraire la racine quarrée d'un quarré algébrique incomplexe.*

SOLUTION.

On éleve un monome algébrique au quarré, en faiſant le quarré du coefficient du monome propoſé, & en affectant de l'expoſant 2 du quarré les lettres de ce monome. (n°. 118).

Donc on extraira la racine quarrée d'un quarré algébrique incomplexe, en prenant la racine quarrée

du coefficient, & en ſupprimant l'expoſant 2 qui affecte les lettres de ce monome.

Par exemple, pour extraire la racine quarrée du quarré $16a^2b^2$, on écrira $4ab$, en prenant la racine quarrée du coefficient 16, & en ſupprimant l'expoſant 2 dans la quantité a^2b^2.

De même pour extraire la racine quarrée de la quantité $25a^2b^2c^2$, on écrira $5abc$.

On ſuppoſe dans ce Chapitre que les lettres du quarré dont on demande la racine quarrée, ont pour expoſant l'expoſant 2 du quarré : on donnera dans la ſuite les regles pour extraire les racines quelconques des grandeurs incomplexes, quel que ſoit leur expoſant.

ARTICLE II.

PROBLÊME.

Extraire la racine quarrée d'un quarré algébrique polinome.

121. Pour préparer aux opérations que demande l'extraction de la racine quarrée d'un quarré algébrique polinome, il faut au préalable examiner les parties qui compoſent le quarré de toute grandeur algébrique complexe.

On regardera toute grandeur algébrique complexe comme compoſée ſeulement de deux parties, l'une déſignée par p, & l'autre par q ; dans cette ſuppoſition le quarré de $p+q$ repréſentera le quarré de toute grandeur algébrique complexe.

Or en faiſant le quarré de $p+q$, c'eſt-à-dire, en multipliant $p+q$ par $p+q$, on trouve le produit $p^2+2pq+q^2$; & le premier terme p^2 de ce quarré déſigne le quarré de la premiere partie p de la racine ; le ſecond terme $2pq$ repréſente le produit du dou-

ble $2p$ de la premiere partie p de la racine, multiplié par la ſeconde q ; le troiſieme terme q^2 repréſente le quarré de la ſeconde partie q de la racine.

Donc toute grandeur algébrique complexe étant partagée en deux parties telles que l'on voudra, ſon quarré renfermera le quarré de la premiere partie, le produit du double de la premiere multiplié par la ſeconde, & le quarré de la ſeconde.

D'où il ſuit que *le quarré d'un binome*, par exemple le quarré de $a+b$ *contient le quarré* a^2 *du premier terme de la racine, le produit* $2ab$ *du double du premier terme multiplié par le ſecond, & le quarré* b^2 *du ſecond terme.*

Si une quantité algébrique, par exemple, $a+b+c$ eſt compoſée de trois termes, on déſignera par p la ſomme $a+b$ des deux premiers termes, & par q le troiſieme terme c, & le quarré $p^2+2pq+q^2$ fera connoître que le quarré d'une quantité compoſée de trois termes, contient 1°. le quarré p^2 de la ſomme de ſes deux premiers termes, lequel contient, comme on vient de le voir, le quarré du premier terme, le double du premier multiplié par le ſecond, plus le quarré du ſecond ; 2°. le produit $2pq$ du double de la ſomme des deux premiers multiplié par le troiſieme ; 3°. le quarré q^2 du troiſieme terme.

Ainſi les produits qui compoſent le quarré de $a+b+c$, ſont

1°. $a^2+2ab+b^2$

2°. $2ac+2bc$

3°. c^2.

C'eſt-à-dire, le quarré de $a+b$, lequel eſt déſigné par p^2.

Le produit du double de $a+b$ multiplié par c, lequel eſt exprimé par $2pq$.

Enfin le quarré du troiſieme terme c, lequel eſt exprimé par q^2.

Et en diſtinguant les produits particuliers, on dira que *le quarré d'un trinome renferme le quarré du premier terme, le double du premier multiplié par le ſecond, & le quarré du ſecond.*

Le double des deux premiers multiplié par le troiſieme, & le quarré du troiſieme.

Si une quantité algébrique, par exemple, $a+b+c+d$, eſt compoſée de quatre termes, on déſignera par p la ſomme des trois premiers, & par q le quatrieme; & le quarré $p^2+2pq+q^2$ fera connoître que *le quarré d'une quantité algébrique compoſée de quatre termes, contient 1°. le quarré du trinome compoſé des trois premiers termes; 2°. le produit du double de la ſomme des trois premiers termes multiplié par le quatrieme; 3°. le quarré du quatrieme*, & ainſi de ſuite.

La compoſition des quarrés polinomes étant connue, on concevra aiſément la maniere de déterminer les termes de leurs racines.

Voici la méthode appliquée à des exemples.

EXEMPLE I.

122. *Extraire la racine quarrée du quarré* $2ab+a^2+b^2$.

Quarré propoſé. $a^2+2ab+b^2$ | $a+b$ racine.

1re opération. $-a^2$ | $2a+b$ diviſeur.

2e opération. $2ab+b^2$

$-2ab-b^2$

0 0

On commencera par ordonner le quarré propoſé par rapport à une des lettres qu'il contient; par exemple, par rapport à la lettre a; c'eſt-à-dire, que l'on écrira, comme on le voit dans l'exemple, $a^2+2ab+b^2$.

On

On mettra le crochet de la diviſion à la droite de ce quarré, on tirera dans ce crochet une barre au-deſſus de laquelle on mettra les termes de la racine, & au-deſſous les diviſeurs dont on aura beſoin. Cette diſpoſition, que l'on fera toujours dans la ſuite pour l'extraction des racines des grandeurs complexes, étant faite, on opérera comme il ſuit.

1°. Pour déterminer le premier terme de la racine, on conſidérera, en ſe rappellant la compoſition des quarrés, (n°. 121) que le premier terme a du quarré propoſé, eſt le quarré du premier terme de la racine; on prendra donc la racine a du terme a^2, & on écrira a ſur la barre dans le crochet, pour le premier terme de la racine; on retranchera du quarré propoſé le quarré a^2, en écrivant $-a^2$ ſous le premier terme a^2; on tirera une barre, on réduira, & il reſtera du quarré propoſé la quantité $2ab+b^2$.

2°. Pour déterminer le ſecond terme de la racine, on conſidérera, en ſe rappellant toujours la compoſition des quarrés, que le ſecond produit qui entre dans un quarré polinome, eſt le double du premier terme de la racine multiplié par le ſecond; d'où l'on conclura que, pour trouver le ſecond terme de la racine, il faut diviſer le terme $2ab$ de la quantité $2ab+b^2$, à laquelle le quarré propoſé eſt réduit, par le double du premier terme de la racine.

On doublera donc le premier terme a de la racine; & ayant écrit le double $2a$ à la place deſtinée aux diviſeurs, on diviſera $2ab$ par $2a$, ce qui donnera le quotient b pour le ſecond terme de la racine, que l'on écrira à la droite du premier terme a, & à la droite du diviſeur $2a$.

On multipliera par le ſecond terme b la ſomme $2a+b$ compoſée du diviſeur $2a$, & du ſecond terme b de la racine, ce qui produira la quantité

$2ab+b^2$, qui contient évidemment le produit du double du premier terme de la racine multiplié par le ſecond, plus le quarré de ce ſecond : on ſouſtraira cette quantité en l'écrivant avec des ſignes contraires ſous le reſte $2ab+b^2$ du quarré propoſé ; on fera la réduction, & comme il ne reſtera rien, on conclura que la racine quarrée du quarré propoſé $a^2+2ab+b^2$ eſt $a+b$, puiſque l'on a épuiſé ce quarré en en retranchant le quarré de $a+b$; c'eſt-à-dire, le quarré du premier terme a, plus le produit du double de a multiplié par b, plus le quarré de b.

EXEMPLE II.

Extraire la racine quarrée du quarré polinome.

$$a^2+2ab+b^2-4ac-4bc+4c^2.$$

OPÉRATION.

	Quarré propoſé.	Racine.
Premiere opération.	$a^2+2ab+b^2-4ac-4bc+4c^2$	$a+b-2c$
	a^2	1er Diviſeur. $2a+b$
Seconde opération.	$2ab+b^2$	2e Diviſeur. $2a+2b-2c$.
	$-2ab-b^2$	
Troiſieme opération.	$-4ac-4bc+4c^2$	
	$+4ac+4bc-4c^2$	
	0 0 0	

Le quarré propoſé étant tout ordonné par rapport à la lettre a, on le diſpoſera comme on le voit dans l'exemple, & l'on déterminera les deux premiers termes $a+b$ de la racine, comme l'on a fait dans l'exemple précédent.

Après l'extraction des deux premiers termes a, b de la racine, c'eſt-à-dire, après la ſeconde opération, le quarré propoſé étant réduit à la quantité $-4ac-4bc+4c^2$, on conclura que la racine

cherchée eſt compoſée de plus de deux termes ; & pour déterminer le troiſieme, on opérera comme il ſuit.

On conſidérera, en ſe rappellant la compoſition des quarrés, (n°. 121) que le troiſieme terme cherché de la racine multiplie le double des deux premiers termes ; d'où l'on conclura que pour trouver le troiſieme terme de la racine, il faut diviſer la quantité reſtante $-4ac-4bc+4c^2$ du quarré propoſé, par le double de la ſomme des deux premiers termes de la racine.

On fera donc le double de la ſomme $a+b$ des deux premiers termes de la racine ; & ayant écrit ce double $2a+2b$ au-deſſous du premier diviſeur $2a$, on diviſera par le premier terme $2a$ de ce ſecond diviſeur, le premier terme $-4ac$ du reſte du quarré propoſé ; ce qui donnera $-2c$ pour quotient & pour le troiſieme terme de la racine, que l'on écrira à la racine & à la droite du diviſeur $2a+2b$.

On multipliera par le troiſieme terme $-2c$ de la racine la quantité $2a+2b-2c$ compoſée du diviſeur & du troiſieme terme $-2c$ de la racine ; ce qui produira la quantité $-4ac-4bc+4c^2$, laquelle contient évidemment le produit du double de la ſomme des deux premiers termes de la racine multiplié par le troiſieme, plus le quarré du troiſieme : on écrira les termes de cette quantité avec des ſignes contraires, pour les ſouſtraire, ſous le reſte $-4ac-4bc+4c^2$ du quarré propoſé ; on réduira, & comme après la réduction il ne reſtera rien, on conclura que la racine quarrée du quarré propoſé eſt exactement $a+b-2c$, puiſque l'on a épuiſé ce quarré propoſé en en retranchant les produits qui compoſent le quarré de la quantité $a+b-2c$; c'eſt-à-dire, le quarré de a, le double de a multiplié par b,

plus le quarré de b, le produit du double de la ſomme $a+b$ multiplié par $-2c$, plus le quarré de $-2c$.

Lorſqu'après avoir déterminé le troiſieme terme de la racine, il reſtera, toute réduction faite, des termes dans le quarré propoſé, on conclura que la racine quarrée aura plus de trois termes; & comme le quatrieme terme inconnu multiplie la ſomme des trois premiers, (121) on le déterminera en diviſant le reſte du quarré propoſé par le double de la ſomme des trois premiers termes de la racine, & ainſi de ſuite.

EXEMPLE III.

Extraire la racine quarrée du quarré.

$$a^2+2ab+b^2-4ac-4bc+4c^2+2ad+2bd-4cd+d^2$$

OPÉRATION.

Quarré propoſé. Racine.

I. opér. $\left\{\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2-4ac-4bc+4c^2+2ad+2bd-4cd+d^2 \\ -a^2 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} a+b-2c+d \\ \text{I. diviſeur.} \end{array}\right.$

II. opérat. $\left\{\begin{array}{l} 2ab+b^2-4ac-4bc+4c^2+2ad+2bd-4cd+d^2 \\ -2ab-b^2 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 2a+b \\ \text{II. diviſeur.} \end{array}\right.$

III. opérat. . . . . $\left\{\begin{array}{l} -4ac-4bc+4c^2+2ad+2bd-4cd+d^2 \\ +4ac+4bc-4c^2 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 2a+2b-4c+ \\ \text{III. diviſeur.} \end{array}\right.$

IV. opération. . . . . $\left\{\begin{array}{l} 2ad+2bd-4cd+d^2 \\ -2ad-2bd+4cd-d^2 \end{array}\right.$

0. 0 0 0

ARTICLE III.

PROBLÊME.

Extraire la Racine quarrée d'un nombre préſenté par plus de deux chiffres, ou du plus grand quarré contenu dans ce nombre.

Pour préparer aux opérations que demande l'extraction des racines quarrées des nombres, on com-

mencera par déterminer en général le nombre de chiffres de la racine, relativement au nombre des chiffres qui exprimeront le nombre proposé pour en extraire la racine quarrée ; ensuite on examinera les parties qui composent le quarré d'un nombre exprimé par tant de chiffres que l'on voudra, & l'arrangement de ces parties dans le quarré qu'elles composent.

123. 1°. On avancera cette regle. Un nombre étant exprimé par plus de deux chiffres, si on le coupe de deux en deux caracteres, en allant de droite à gauche, soit que la premiere tranche ait deux chiffres, ou qu'elle en ait seulement un, le nombre de ces tranches exprimera toujours le nombre des chiffres de la racine quarrée du nombre proposé, s'il est un quarré parfait, ou le nombre des chiffres de la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé, s'il est un quarré imparfait : on établira cette regle par l'induction suivante.

1°. Le plus petit nombre de deux tranches est 1|00, & la racine quarrée de 1|00 est le nombre 10 exprimé par deux chiffres, puisque $10 \times 10 = 100$.

Le plus grand nombre de deux tranches est 99|99, & la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans 99|99, est un nombre exprimé seulement par deux chiffres, puisque 100, qui est la plus petite racine exprimée par trois chiffres, a pour quarré le nombre 1|00|00 composé de trois tranches.

Donc, tout nombre de deux tranches a précisément deux chiffres à sa racine quarrée, ou à la racine quarrée du plus grand quarré qu'il contient.

2°. Le plus petit nombre de trois tranches est 1|00|00, & sa racine quarrée est le nombre 100 exprimé par trois chiffres, puisque $100 \times 100 = 10000$.

Le plus grand nombre de trois tranches est 99|99|99, & la racine quarrée du plus grand quarré contenu

dans 999999, eſt un nombre exprimé ſeulement par trois chiffres, puiſque 1000, qui eſt le plus petit de tous les nombres exprimés par quatre chiffres, a pour quarré le nombre 1|00|00|00 compoſé de quatre tranches.

Donc, tout nombre compoſé de trois tranches a préciſément trois chiffres à ſa racine quarrée ou à la racine quarrée du plus grand quarré qu'il contient; & comme on pourra pouſſer cette induction auſſi loin que l'on voudra, on conclura en général que la racine quarrée d'un nombre quelconque, ou celle du plus grand quarré qu'il contient, a autant de chiffres que le nombre propoſé renferme de tranches, lorſqu'on le coupe de deux en deux caracteres.

124. 2°. Pour déterminer les parties qui compoſent le quarré d'une racine exprimée par plus d'un chiffre, on regardera cette racine comme compoſée ſeulement de deux parties; à ſçavoir, d'un nombre de dizaines, exprimé par tant de chiffres que l'on voudra, & d'un nombre d'unités exprimé par un ſeul chiffre, & l'on déſignera la premiere partie par p, & la ſeconde par q.

Dans cette ſuppoſition le quarré de $p+q$ repréſentera le quarré de toute racine exprimée par plus d'un chiffre, & en montrera la compoſition. Or le quarré de $p+q$ eſt $p^2+2pq+q^2$, & ſon premier terme p^2 repréſente le quarré de la premiere partie p de la racine.

Le ſecond terme $2pq$ repréſente le produit du double de la premiere partie p de la racine, multiplié par la ſeconde q.

Le troiſieme terme q^2 repréſente le quarré de la ſeconde partie q de la racine.

Donc, le quarré de tout nombre partagé en un nombre de dizaines & un nombre d'unités, contient

1°. le quarré du nombre des dizaines ; 2°. le produit de deux fois le nombre des dixaines, multiplié par les unités ; 3°. le quarré du nombre des unités.

Par exemple, ſi l'on fait le quarré du nombre 56 compoſé de 5 dizaines & de 6 unités, ce quarré renfermera 1°. le quarré des 5 dizaines $= 50 \times 50 = 2500$

2°. le produit du double des 5 dizaines multiplié par les unités $= 50 \times 2 \times 6 = 100 \times 6 = 600$

3°. le quarré des 6 unités $= 6 \times 6 = 36$

Et le quarré de 56 ſera en tout 3136

125. 3°. Quant à l'arrangement des parties qui compoſent le quarré d'un nombre, il ſera fort aiſé de le déduire des degrés des unités de ces parties.

$10 \times 10 = 100$, donc le quarré d'un nombre de dizaines eſt un nombre de centaines qui aura par conſéquent deux places à ſa droite.

Un nombre de dizaines multiplié par un nombre d'unités, eſt un nombre de dizaines qui aura une place à ſa droite.

Le quarré d'un nombre d'unités eſt un nombre d'unités qui n'aura aucune place à ſa droite.

Ainſi ſi l'on propoſe, par exemple, le quarré 3136, dont la racine 56 eſt exprimée par deux chiffres, & que l'on partage ce quarré de deux en deux caracteres, en allant de droite à gauche de cette ſorte . . . . . 31|36

On dira, 1°. que le quarré 25 du chiffre 5 des dizaines eſt dans la tranche 31, la premiere à gauche, parce que le quarré d'un nombre de dizaines doit avoir deux rangs, ou une tranche de deux chiffres à ſa droite.

25 ..
60.
36

On dira, 2°. que le produit 60 qui réſulte de la multiplication du double des 5 dizaines de la racine, multiplié par les 6 unités, ayant une place à ſa droite,

ne va pas plus loin que le chiffre 3, le premier à gauche dans la ſeconde tranche 36.

On dira, 3°. que le quarré 36 des 6 unités de la racine n'ayant aucune place à ſa droite, terminera vers la droite le quarré propoſé.

Connoiſſant bien l'arrangement des parties qui compoſent le quarré d'une racine exprimée par deux chiffres, on déterminera aiſément les deux chiffres de cette racine, lorſque le quarré ſera propoſé; & auſſi-tôt que l'on ſaura extraire une racine de deux chiffres, il ſera aiſé d'extraire une racine compoſée de tant de chiffres que l'on voudra, comme on le verra dans les exemples ſuivans.

EXEMPLE I.

126. *Extraire la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre* 3138.

OPÉRATION.

	Quarré propoſé.	Racine.
I. opération.	31|38 25	56 diviſeur.
II. opération.	6|38 636	10 . 6.
	reſte 2.	

On partagera le nombre propoſé de deux en deux caracteres, en allant de droite à gauche; cette préparation fera connoître que la racine cherchée a deux chiffres, parce que le nombre propoſé eſt compoſé de deux tranches (123).

Pour déterminer ces deux chiffres de la racine, on conſidérera que le plus grand quarré contenu dans le nombre propoſé 3138, contient le quarré du chiffre des dizaines de la racine cherchée, plus le produit

du double du chiffre des dizaines, multiplié par le chiffre des unités, plus le quarré du chiffre des unités.

Or, 1°. le quarré du chiffre des dizaines ayant deux places à ſa droite, (125) ſera dans la tranche 31 la premiere à gauche; ainſi on aura le chiffre des dizaines de la racine, en prenant la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans la tranche 31.

On dira donc le plus grand quarré contenu dans 31 eſt 25, dont la racine quarrée eſt 5, & l'on écrira 5 dans le crochet, pour le chiffre des dizaines de la racine.

On placera ſous la tranche 31 le plus grand quarré 25 qu'elle contient; on retranchera 25 de 31, & il reſtera 6, à côté duquel on abaiſſera la ſeconde tranche 38, & le nombre propoſé ſera réduit au nombre 6|38, qui contient encore le produit du double du chiffre des dizaines, multiplié par les unités, plus le quarré des unités.

2°. Le produit qui réſulte du double des dizaines multiplié par les unités, ayant une place à ſa droite, (125) ſera dans la partie 63 du reſte 6|38; mais le produit du double du nombre des dizaines, multiplié par les unités, étant diviſé par l'un de ſes produiſans, à ſavoir, le double des dixaines, on doit avoir au quotient l'autre produiſant, à ſavoir, le chiffre des unités.

On doublera donc le chiffre 5 des dizaines de la racine; & ayant écrit le double 10 à la place deſtinée aux diviſeurs, on diviſera 63 par 10, ce qui donnera le quotient 6.

Pour déterminer ſi le quotient 6 eſt tout entier le chiffre des unités de la racine, on l'écrira à la droite du diviſeur 10, ce qui donnera le nombre 10.6; on multipliera 106 par 6, ce qui donnera évidem-

ment, 1°. le produit 10×6, c'eſt-à-dire, le produit du double des 5 dizaines de la racine, multiplié par le quotient 6; 2°. le quarré 6×6 du quotient 6. Et comme le nombre 636 peut être ſouſtrait du reſte 638 du quarré propoſé, on conclura que le quotient 6 eſt le chiffre des unités de la racine; enſorte que la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre 3138, eſt 56.

Pour connoître de combien le nombre propoſé 3138 ſurpaſſe le quarré de la racine trouvée, on retranchera 636 de 638, & le reſte 2 ſera l'excès du nombre propoſé ſur le quarré de la racine trouvée 56, puiſque c'eſt ce qui reſte du nombre propoſé, après en avoir retranché les parties qui compoſent le quarré de la racine trouvée; à ſavoir, 1°. le quarré 25 du chiffre 5 des dizaines; 2°. le nombre 636 qui renferme le produit du double du chiffre 5 multiplié par le chiffre 6, plus le quarré du chiffre 6.

Que ſi en multipliant par le quotient 6 le nombre 106 compoſé du double 10 du chiffre 5 des dizaines de la racine, & du quotient 6 écrit à la droite de 10, le produit ſe fût trouvé plus grand que la partie reſtante 638 du nombre propoſé; il auroit fallu diminuer continuellement de l'unité le quotient 6, juſqu'à ce que l'on fût parvenu à un chiffre tel qu'en multipliant par ce chiffre le nombre formé du diviſeur 10 & de ce chiffre écrit à la droite du diviſeur 10, le produit eût pû être retranché de la partie 638 du nombre propoſé.

REMARQUE.

127. *On déduira de l'extraction que l'on vient de faire, cette méthode générale pour extraire la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans un nombre compoſé de deux tranches ſeulement.*

1°. On prendra la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans la premiere tranche à gauche; cette racine ſera le chiffre des dizaines de la racine.

2°. Ayant retranché de la premiere tranche à gauche le quarré du premier chiffre de la racine, c'eſt-à-dire, le plus grand quarré qu'elle contient, & ayant abaiſſé à la droite du reſte la ſeconde tranche, on diviſera par le double du chiffre des dizaines de la racine le nombre formé, & du premier chiffre à gauche dans la ſeconde tranche, & du reſte de la premiere tranche, on prendra (comme on l'a expliqué) une partie convenable de ce quotient pour le chiffre des unités de la racine, & l'on déterminera enſuite l'excès du nombre propoſé ſur le quarré de la racine trouvée.

EXEMPLE II.

128. *Extraire la Racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre* 313824.

OPÉRATION.

	Nombre propoſé.	Racine.
I. opération.	31|38|24	560
	25	I. diviſeur.
II. opération.	6|38	10.6
	636	II. diviſeur.
III. opération...	2|24	112.0
	0	
	reſte 224	

On partagera, comme dans l'exemple précédent, le nombre propoſé de deux en deux caracteres; & comme il renfermera trois tranches, on conclura que la racine quarrée du plus grand quarré qu'il contient aura trois caracteres.

Pour déterminer les trois caracteres de la racine ; on conſidérera que cette racine étant regardée comme compoſée d'un nombre de dizaines exprimé par deux chiffres, & d'un nombre d'unités exprimé par un ſeul chiffre, le plus grand quarré contenu dans le nombre propoſé renfermera le quarré du nombre des dizaines, plus le produit du double du nombre des dizaines, multiplié par les unités, plus le quarré des unités. (n°. 124.)

Or, 1°. le quarré du nombre des dizaines ayant deux rangs à ſa droite, (125) ſera contenu dans les tranches 31|38, les deux premieres à gauche ; & comme la racine de ce quarré eſt compoſée de chiffres, dont l'un exprime des dizaines relativement à l'autre, les parties qui compoſent ce quarré ſeront arrangées dans les tranches 31|38 de la même façon que le ſont dans le quarré d'une racine de deux chiffres ſeulement, les parties qui le compoſent ; ainſi l'on déterminera la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans les tranches 31|38, comme on l'a fait dans l'exemple précédent (126).

En faiſant l'opération, on trouvera 56 pour la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans les tranches 31|38, & 2 pour le reſte de cette extraction : ainſi le nombre des dizaines de la racine cherchée eſt 56.

On abaiſſera la tranche 24 à la droite du reſte 21, & le nombre propoſé diminué du plus grand quarré contenu dans les deux premieres tranches, ſera réduit au nombre 224, qui doit contenir encore le produit du double du nombre 56 des dizaines multiplié par le chiffre inconnu des unités, plus le quarré de ce chiffre des unités.

2°. Le produit du double du nombre 56 des dizaines, multiplié par les unités, ayant une place à ſa

droite, (125) doit être cherché dans la partie 22 du reſte 2|24 du nombre propoſé; ainſi, pour déterminer le chiffre des unités de la racine, on doublera le nombre 56 des dizaines, ce qui donnera 112 : on diviſera 22 par 112; & comme 22 ne renferme pas 112, on écrira zéro à la racine pour le caractere des unités.

On écrira zero à la droite de 112, ce qui donnera 1120; & comme 1120 multiplié par zero donne zero pour le produit du double du nombre des dizaines multiplié par le quotient 0, & pour le quarré du quotient 0, & qu'en retranchant 0 de 224, il reſte 224, on conclura que la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre 31|38|24 eſt 560, & que l'excès de ce nombre propoſé ſur le quarré de la racine trouvée 560 eſt 224.

REMARQUE.

129. *En général, lorſqu'un nombre ſera compoſé de trois tranche, on déterminera les trois chiffres de la racine quarre du plus grand quarré qu'il contient, en opérant comme il ſuit.*

1°. On extraira la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans les deux premieres tranches, comme ſi le nombre propoſé ne renfermoit que ces deux tranches.

2°. On diviſera le nombre formé du premier chiffre à gauche dans la troiſieme tranche, & du reſte des deux premieres tranches, par le double des deux premiers chiffres de la racine, & l'on prendra une partie convenable de ce quotient, comme on l'a expliqué dans l'exemple premier, pour déterminer le chiffre des unités de la racine, après quoi on déterminera l'excès du nombre propoſé ſur le quarré de la racine trouvée.

EXEMPLE III.

130. *Extraire la racine quarrée du quarré* 31382404.

OPÉRATION.

	Quarré proposé.	Racine.
I. opération.	31|38|24|04 / 25	5602 — I. diviseur.
II. opération.	6|38 / 636	10 . 6 — II. diviseur.
III. opération.	2|24 / 0	112 . 0 — III. diviseur.
IV. opération.	224|04 / 224 04	1120 . 2
	000 00	

On partagera, comme dans les exenples précédens, le nombre proposé de deux en deux caracteres, & à cause des quatre tranches qu'il renferme, on conclura que la racine cherchée seraexprimée par quatre chiffres.

Pour déterminer les quatre chiffres de la racine, on considérera que cette racine étant regardée comme composée d'un nombre de dizaines exprimé par trois chiffres & d'un nombre d'unités exprimés par un seul chiffre, le quarré proposé renfemera le quarré du nombre des dizaines, plus le produit du double du nombre des dizaines multiplié par les unités, plus le quarré du chiffre des unités.

Or, 1°. le quarré du nombre des dizaines ayant deux rangs à sa droite, sera contenu dans les tranches 31\|38\|24, les trois premieres à gauche dans le nombre proposé; ainsi on connoîtra les trois chiffres du nombre des dizaines de la racine, en extrayant la ra-

cine quarrée du plus grand quarré contenu dans les trois tranches 31|38|24, comme l'on a fait dans l'exemple précédent.

En faiſant l'opération, on trouvera 560 pour la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans 313824, & 224 pour le reſte de l'extraction : ainſi 560 ſera le nombre des dizaines de la racine.

On abaiſſera à côté du reſte 224 la quatrieme tranche |04, & le quarré propoſé ſera réduit au nombre 224|04, qui contient encore le produit de deux fois le nombre des dizaines multiplié par le chiffre des unités, plus le quarré du chiffre des unités.

2°. Le produit du double du nombre 560 des dizaines multiplié par le chiffre des unités, ayant une place à ſa droite, n'ira pas plus loin que le chiffre 0, le premier à gauche de la tranche |04, & ſera par conſéquent dans la partie 224|0 du reſte 224|04 du nombre propoſé; il eſt encore évident que le produit étant diviſé par le double du nombre des dizaines, on aura le chiffre des unités pour quotient. On doublera donc le nombre 560 des dizaines de la racine, ce qui donnera 1120 que l'on écrira au-deſſous du ſecond diviſeur, puis on diviſera 224|0 par 1120, ce qui donnera 2 pour quotient. On écrira le quotient 2 à la droite du diviſeur 1120, ce qui fera 11202, qu'on multipliera par le quotient 2, ce qui produira le nombre 22404, qui contient évidemment le produit du double du nombre 560 des dizaines de la racine multiplié par le quotient 2, plus le quarré de ce quotient 2; on retranchera 22404 du reſte 224|04 du quarré propoſé; & comme il ne reſtera rien, on conclura que le quotient 2 doit être pris pour le chiffre des unités de la racine, & que la racine quarrée du quarré propoſé 31382404 eſt exactement 5602.

REMARQUE.

131. *En général, lorſqu'un nombre ſera compoſé de quatre tranches, on déterminera les quatre chiffres de la racine du plus grand quarré qu'il contient, en opérant comme il ſuit.*

1°. On extraira la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans les trois premieres tranches à gauche, comme ſi le nombre propoſé n'étoit compoſé que de ces trois tranches.

2°. On diviſera par le double des trois premiers chiffres de la racine le nombre formé du premier chiffre à gauche dans la quatrieme tranche, & du reſte des trois premieres tranches, & l'on prendra pour le quatrieme chiffre de la racine une partie convenable du quotient, comme on l'a expliqué dans l'exemple premier, en parlant du ſecond chiffre de la racine. Que ſi le nombre propoſé renfermoit cinq tranches, la racine quarrée du plus grand quarré qu'il contiendroit, ſeroit exprimée par cinq chiffres que l'on détermineroit en opérant comme il ſuit.

1°. On extraira la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans les quatre premieres tranches à gauche, comme ſi le nombre propoſé n'étoit compoſé que de quatre tranches, ce qui donnera les quatre premiers chiffres de la racine.

2°. On diviſera par le double des quatre premiers chiffres de la racine, le nombre formé du premier chiffre à gauche dans la cinquieme tranche, & du reſte des quatre premieres tranches, & l'on prendra une partie convenable de ce quotient, & ainſi de ſuite.

ARTICLE IV.

PROBLÊME I.

132. *Extraire la Racine quarrée d'une fraction.*

SOLUTION.

Pour élever une fraction au quarré, on fait une nouvelle fraction dont le numérateur eſt le quarré du numérateur de la fraction propoſée, & dont le dénominateur eſt le quarré du dénominateur de cette même fraction propoſée (n°. 118).

Donc en général la racine quarrée d'une fraction doit être une nouvelle fraction qui ait pour numérateur la racine quarrée du numérateur de la fraction propoſée, & pour dénominateur la racine quarrée du dénominateur de la même fraction propoſée.

Si le numérateur & le dénominateur de la fraction propoſée ſont des quarrés parfaits, on aura exactement la racine quarrée de cette fraction.

Par exemple, ſi on demande la racine quarrée de $\frac{49}{64}$, dont le numérateur & le dénominateur ſont des quarrés parfaits, on aura, en prenant la racine quarrée 7 du numérateur 49, & la racine quarrée 8 du dénominateur 64, la fraction $\frac{7}{8}$, qui ſera la racine demandée ſans aucun reſte.

Si le numérateur de la fraction eſt un quarré imparfait, & le dénominateur un quarré parfait, on fera une nouvelle fraction dont le dénominateur ſoit la racine quarrée du dénominateur de la fraction propoſée, & dont le numérateur ſoit la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le numérateur de la même fraction propoſée.

Par exemple, ſi l'on demande la racine quarrée de la fraction $\frac{63}{81}$, dont le dénominateur 81 eſt un quarré

parfait, & dont le numérateur eſt un quarré imparfait, on prendra la racine quarrée de 81, laquelle eſt 9, & la racine quarrée 8 du plus grand quarré 64 contenu dans le numérateur 65, & l'on fera la fraction $\frac{8}{9}$, qui ſera, à peu de choſe près, la racine quarrée de la fraction $\frac{65}{81}$.

Si aucun des termes de la fraction dont on veut extraire la racine quarrée n'eſt un quarré parfait, on multipliera ſes deux termes par ſon dénominateur; ce qui donnera une nouvelle fraction de même valeur que la propoſée, (n°. 95) & dont le dénominateur ſera un quarré parfait, & par conſéquent on pourra en extraire la racine quarrée, comme on vient de le dire.

Par exemple, ſi on propoſe d'extraire la racine quarrée de la fraction $\frac{7}{8}$, dont aucun des termes n'eſt un quarré parfait, on multipliera ſes deux termes 7 & 8 par le dénominateur 8, & l'on aura la nouvelle fraction $\frac{56}{8\times 8}$, dont la racine quarrée ſera $\frac{7}{8}$, à peu de choſe près.

ARTICLE V.

PROBLÊME.

133. *Connoître ſi la racine quarrée que l'on a extraite d'un nombre propoſé qui n'eſt pas un quarré parfait, eſt celle du plus grand quarré qu'il contient, ou ſi cette racine ne pourroit pas être augmentée de l'unité.*

SOLUTION.

Lorſque l'excès du nombre propoſé ſur le quarré de la racine trouvée eſt conſidérable, on doit chercher ſi la racine trouvée ne pourroit pas être augmentée de l'unité : pour le connoître, on propoſera cette regle.

Si le reſte de l'opération eſt moindre que la ſomme du double de la racine trouvée, plus l'unité, la racine trouvée ne pourra pas être augmentée de l'unité.

Si le reſte de l'opération n'eſt pas moindre que la ſomme du double de la racine trouvée, plus l'unité, on pourra augmenter de l'unité la racine trouvée.

Cette regle eſt fondée ſur cette propoſition : Lorſque deux racines, par exemple, $a+1$ & a, different de l'unité, le quarré de la plus grande racine ſurpaſſe le quarré de la plus petite d'une quantité égale à deux fois cette plus petite racine, plus l'unité.

Que l'on faſſe en effet le quarré . . $\left\{\begin{matrix} a^2+2a+1 \\ a^2 \end{matrix}\right.$ de $\left\{\begin{matrix} a+1. \\ a \end{matrix}\right.$ (121).

L'excès du quarré a^2+2a+1 ſur le quarré de a^2 eſt évidemment $2a+1$, c'eſt-à-dire, deux fois la moindre racine a, plus l'unité.

Ainſi, lorſque le reſte de l'extraction vaudra le double de la racine, plus l'unité, on conclura que la racine trouvée eſt moindre de l'unité que la racine du plus grand quarré contenu dans le nombre propoſé, & par conſéquent il faudra augmenter la racine trouvée de l'unité.

134. On voit donc, 1°. que lorſque l'on extrait la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans un nombre propoſé, le reſte de l'opération eſt toujours moindre que deux fois la racine trouvée, plus l'unité, autrement on pourroit augmenter de l'unité la racine trouvée, & par conſéquent l'on n'auroit pas extrait la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre propoſé.

135. 2°. Lorſqu'on a extrait la racine du plus grand quarré contenu dans un nombre propoſé, il ne

s'en faut pas 1 que l'on ait la véritable racine du nombre proposé : car si l'on en étoit éloigné de l'unité, le reste de l'opération vaudroit au moins le double de la racine trouvée, plus l'unité ; ce qui est impossible lorsque l'on a extrait la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le nombre proposé (n°. 134).

136. 3°. Lorsqu'on a extrait la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans une fraction, dont le numérateur est un quarré imparfait, & le dénominateur un quarré parfait, le défaut de la racine est toujours moindre qu'une unité fractionnaire de même dénomination que celle de la racine trouvée.

Par exemple, la racine quarrée $\frac{3}{8}$ du plus grand quarré contenu dans la fraction $\frac{10}{64}$, ne differe pas de $\frac{1}{8}$ de la vraie racine $\frac{10}{64}$. Car puisque la racine 3 du plus grand quarré contenu dans le numérateur 10 ne differe pas de 1 de la vraie racine quarrée du numérateur 10 (n°. 135), il est évident que la vraie racine de $\frac{10}{64}$ est moindre que $\frac{4}{8}$; & par conséquent la vraie racine de $\frac{10}{64}$ ne surpasse pas de $\frac{1}{8}$ la racine trouvée $\frac{3}{8}$.

En général, lorsqu'on extrait la racine quarrée d'une fraction, dont le numérateur est un quarré imparfait, & le dénominateur un quarré parfait, le défaut de la racine est toujours moindre qu'une des unités fractionnaires de la racine trouvée.

ARTICLE VI.

PROBLÊME.

137. *Approcher de si près que l'on voudra de la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas un quarré parfait.*

SOLUTION.

On proposera, par exemple, de faire en sorte que

la racine trouvée differe de la racine exacte d'une quantité moindre qu'un dixieme, un centieme, un millieme, un dix millieme, un cent millieme, &c. de l'unité; & pour découvrir la méthode de cette approximation, on conſidérera que lorſqu'on extrait la racine quarrée d'une fraction, dont le dénominateur eſt un quarré parfait, & le numérateur un quarré imparfait, le défaut de la racine trouvée eſt moindre qu'une unité fractionnaire de même dénomination que celles de la racine trouvée (n°. 136); & par conſéquent le défaut eſt moindre qu'un dixieme, ou un centieme, ou un millieme, &c. de l'unité, lorſque le dénominateur de la racine trouvée eſt 10, ou 100, ou 1000, &c. ou lorſque le dénominateur de la fraction eſt le quarré de 10, ou de 100, ou de 1000, &c.

Donc pour extraire la racine quarrée d'un nombre qui n'eſt pas un quarré parfait, de façon que la racine trouvée differe de la vraie racine d'une quantité moindre qu'un dixieme, ou un centieme, ou un millieme, &c. de l'unité, il faudra changer le quarré imparfait propoſé en une fraction (n°. 89), dont le dénominateur ſoit le quarré de 10, ou le quarré de 100, ou le quarré de 1000, &c. & prendre enſuite la racine quarrée de cette fraction.

Par exemple, pour extraire la racine quarrée de 24, de façon que la racine trouvée differe de la vraie racine d'une quantité moindre que $\frac{1}{100}$ de l'unité, on fera le quarré de 100 qui eſt 10000; & ayant changé 24 en la fraction $\frac{240000}{10000}$, dont le dénominateur eſt le quarré de 100, & dont le numérateur eſt le produit du quarré imparfait 24, multiplié par le quarré de 100, on fera la fraction $\frac{489}{100}$, dont le numérateur eſt la racine quarrée du plus grand quarré contenu dans le numérateur 240000, & dont le dénominateur eſt

la racine quarrée du dénominateur 10000, & cette fraction $\frac{489}{100} = 4 + \frac{89}{100}$ ne differe pas de la racine quarrée de 24, de $\frac{1}{100}$ de l'unité.

REMARQUE.

138. *Pour approcher de ſi près que l'on voudra de la vraie racine quarrée d'une fraction*, 1°. *on changera la fraction propoſée en une autre dont le dénominateur ſoit un quarré parfait* (n°. 132), (*ſi le dénominateur de la propoſée n'en eſt pas un*); 2°. *on multipliera les deux termes de cette nouvelle fraction par le quarré de* 10, *ou de* 100, *ou de* 1000, *&c. ſelon que l'on voudra que la racine trouvée differe de la vraie d'une quantité moindre que* $\frac{1}{10}$, *ou* $\frac{1}{100}$, *ou* $\frac{1}{1000}$, *&c. de l'unité fractionnaire*; 3°. *enfin on extraira la racine quarrée de cette derniere fraction.* (132).

Par exemple, ſi l'on propoſe d'extraire la racine quarrée de la fraction $\frac{2}{5}$, *de façon que le défaut de la racine ſoit moindre qu'un centieme de l'unité fractionnaire* $\frac{1}{5}$.

1°. *Comme le dénominateur de la fraction propoſée n'eſt pas un quarré parfait, on multipliera ſes deux termes par le dénominateur* 5, *& l'on aura la nouvelle fraction* $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ (n°. 95).

2°. *On multipliera les deux termes de cette nouvelle fraction par le quarré de* 100, *lequel eſt* 10000, *& l'on aura encore* $\frac{100000}{250000} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ (n°. 95).

3°. *On extraira la racine quarrée du numérateur* 100000, *& celle du dénominateur* 250000, *de la fraction* $\frac{100000}{250000}$, *& l'on aura* $\frac{316}{500}$ *pour la racine approchée de* $\frac{2}{5}$, *de façon que le défaut de cette racine ne ſera pas de* $\frac{1}{100}$ *de l'unité fractionnaire* $\frac{1}{5}$, *ou ne ſera pas de* $\frac{1}{500}$ *de l'unité entiere.*

139. Un quarré imparfait quelconque, repréſenté par a, étant transformé en fraction d'un dénomina-

leur quarré (89), quelque grand que l'on voudra, repréſenté, par exemple, par x^2, le réſultat $\frac{ax^2}{x^2}$ ſera un quarré imparfait; car $\frac{ax^2}{x^2}$ étant égal à la quantité a, (92) qui eſt un quarré imparfait par la ſuppoſition, il eſt néceſſaire que la fraction $\frac{ax^2}{x^2}$ ſoit auſſi un quarré imparfait; & par conſéquent en extrayant la racine quarrée de la fraction $\frac{ax^2}{x^2}$, il y aura un reſte, autrement $\frac{ax^2}{x^2}$ ſeroit un quarré parfait. D'où l'on conclura que, quoiqu'il ſoit poſſible d'approcher à l'infini de la vraie racine quarrée d'un nombre qui n'eſt pas un quarré parfait, il n'eſt pas poſſible de la déterminer exactement par aucun nombre entier ou fractionnaire.

SECTION III.

Extraction des Racines cubiques.

ON propoſera d'extraire la racine cubique.

1°. D'un cube algébrique incomplexe.

2°. Celle d'un cube polinome algébrique.

3°. Celle d'un nombre exprimé par plus de trois chiffres, ou celle du plus grand cube parfait contenu dans ce nombre, lorſqu'il ne ſera pas un cube parfait.

On donnera enſuite la maniere de connoître ſi la racine cubique, extraite d'un nombre qui n'eſt pas un cube parfait, ne pourroit pas être augmenté de l'unité.

Suivra enfin la méthode d'approcher ſi près que

l'on voudra de la racine cubique d'un nombre qui n'eſt pas un cube parfait.

140. Comme les regles pour extraire la racine cubique ſuppoſent que l'on connoît les cubes des nombres repréſentés par un ſeul chiffre, on donnera ici ces cubes au deſſous de leurs racines.

Racines.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Cubes.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

Et l'on remarquera que cette table ſuffit pour déterminer la racine cubique de tout nombre exprimé par moins de quatre chiffres, ou la racine cubique du plus grand cube contenu dans ce nombre, s'il eſt un cube imparfait.

Car le plus petit nombre exprimé par quatre chiffres étant 1000, & ſa racine cubique étant 10, puiſque $10 \times 10 \times 10 = 1000$, il eſt évident qu'un nombre moindre que 1000, & par conſéquent exprimé par moins de quatre chiffres, aura, pour ſa racine cubique, un nombre moindre que 10, & par conſéquent un nombre exprimé par un ſeul chiffre.

Donc puiſque la table que l'on vient de donner renferme les cubes de toutes les racines exprimées par un ſeul chiffre, elle ſuffit pour connoître les racines cubiques des nombres exprimés par moins de quatre chiffres, ou les racines cubiques des plus grands cubes contenus dans ces nombres.

ARTICLE I.

PROBLÊME.

141. *Extraire la racine cubique d'un cube algébrique incomplexe.*

SOLUTION.

On éleve un monome algébrique au cube en fai-

ſant le cube du coefficient du monome propoſé, & en affectant de l'expoſant 3 du cube les lettres de ce monome (n°. 118).

Donc on extraira la racine cubique d'un cube algébrique incomplexe, en prenant la racine cubique du coefficient du monome propoſé, & en ſupprimant l'expoſant 3 qui affecte les lettres de ce monome.

Par exemple, pour extraire la racine cubique de $8a^3b^3$, on écrira $2ab$, en prenant la racine cubique 2 du coefficient 8, & en ſupprimant l'expoſant 3 dans la quantité a^3b^3.

De même pour extraire la racine cubique du cube $64a^3b^3x^3$, on écrira $4abx$.

On ſuppoſe dans ce Chapitre que les lettres du cube dont on demande la racine cubique, ont pour expoſant l'expoſant 3 du cube : l'on a déja averti que l'on donneroit dans la ſuite des regles pour extraire les racines quelconques des grandeurs incomplexes, quel que ſoit leur expoſant.

ARTICLE II.

PROBLÊME.

Extraire la racine cubique d'un cube algébrique polinome.

142. Pour préparer aux opérations que demande l'extraction de la racine cubique d'un cube polinome, on examinera les parties qui compoſent le cube d'une grandeur algébrique complexe; on regardera toute grandeur algébrique complexe comme compoſée de deux parties ſeulement, l'une déſignée par p, & l'autre par q : dans cette ſuppoſition le cube de $p+q$ repréſentera le cube de toute grandeur algébrique complexe.

Or en faiſant le cube de $p+q$, c'eſt-à-dire, en

faisant d'abord son quarré $p^2+2pq+q^2$, & en multipliant ensuite ce quarré par $p+q$, on trouve pour produit $p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$.

Et le premier terme p de ce cube représente le cube de la premiere partie p de la racine.

Le second terme $3p^2q$, représente le produit de trois fois le quarré de la premiere partie p, multiplié par la seconde q.

Le troisieme terme $3pq^2$, représente le produit de trois fois le quarré de la seconde partie q de la racine multiplié par la premiere partie p.

Le quatrieme terme q^3 représente le cube de la seconde partie q de la racine.

Donc toute grandeur algébrique complexe étant partagée en deux parties telles qu'on le voudra, son cube renfermera :

1°. *Le cube de la premiere partie.*

2°. *Trois fois le quarré de la premiere partie, multiplié par la seconde.*

3°. *Trois fois le quarré de la seconde partie, multiplié par la premiere.*

4°. *Le cube de la seconde partie.*

D'où il suit que le cube d'un binome, par exemple, le cube du binome $a+b$, contient le cube a^3 du premier terme a, $3a^2b$, c'est-à-dire, trois fois le quarré du premier terme a, multiplié par le second b, $3ab^2$, c'est-à-dire, trois fois le quarré du second terme b, multiplié par le premier a; enfin b^3, c'est-à-dire, le cube du second terme b.

Si une quantité algébrique, par exemple, $a+b+c$, est composée de trois termes, on désignera par p la somme $a+b$ des deux premiers termes, & par q le troisieme terme c, & le cube $p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$, fera connoître que le cube d'une quantité composée de trois termes contient :

1°. Le cube n^3 de la ſomme $a+b$ des deux premiers termes, lequel contient, comme on vient de le voir, le cube du premier terme, trois fois le quarré du premier terme multiplié par le ſecond, trois fois le quarré du ſecond multiplié par le premier, plus le cube du ſecond.

2°. Le produit fait de la multiplication de trois fois le quarré de la ſomme $a+b$ des deux premiers termes multiplié par le troiſieme terme c; ce qui eſt déſigné par $3p^2q$.

3°. Le produit fait de la multiplication de trois fois le quarré du troiſieme terme c multiplié par la ſomme des deux premiers termes $a+b$; ce qui eſt déſigné par $3pq^2$.

4°. Le cube du troiſieme terme c; ce qui eſt déſigné par q^3.

Lorſqu'on ſuppoſera une quantité algébrique compoſée de quatre termes, on déſignera par p la ſomme des trois premiers termes, & par q le quatrieme terme; & le cube de $p+q$, c'eſt-à-dire, $p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$ fera encore connoître les parties qui compoſent le cube d'un quadrinome, & ainſi de ſuite.

La compoſition des cubes polinomes étant ainſi connue, on comprendra aiſément les opérations que demande l'extraction de leurs racines cubiques.

Voici la méthode appliquée à des exemples.

EXEMPLE I.

143. *Extraire la racine cubique du polinome* $3a^2b+3ab^2+a^3+b^3$.

OPÉRATIONS.

I. opération. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ | Racine. $a+b$
$-a^3$ | diviſeur. $3a^2+3ab+b^2$

II. opération. $+3a^2b+3ab^2+b^3$
$-3a^2b-3ab^2-b^3$

o o o

EXEMPLE II.

Extraire la racine cubique du cube polinome.

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3.$$

OPÉRATIONS.

Cube proposé. | Racine.

I. opération. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$ | $a+b+c$

$-a^3$

I. diviseur. $3a^2+3ab+b^2$

II. opération. $+3a^2b+3ab^2+b^2+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$

$-3a^2b-3ab^2-b^3$

II. diviseur. $3a^2+6ab+3b^2+3ac+3bc+c^2$

III. opération. . . . . $+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$

$-3a^2c-6abc-3b^2c-3ac^2-3bc^2-c^3$

o o o o o o

Le cube proposé étant tout ordonné, on disposera le tout comme on le voit dans cet exemple, & l'on déterminera la partie $a+b$ de la racine, comme l'on a fait dans l'exemple précédent.

Après l'extraction de ces deux premiers termes, c'est-à-dire, après la seconde opération, le cube proposé étant réduit à la quantité $3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$, on conclura que la racine cubique demandée est composée de plus de deux termes; & pour déterminer le troisieme, on opérera comme il suit.

On considérera, en se rappellant la composition des cubes, que le troisieme terme cherché multiplie le triple du quarré de la somme des deux premiers termes, d'où l'on conclura que pour trouver ce troisieme terme de la racine, il faut diviser par le triple du quarré de la somme des deux premiers termes la quantité restante $3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$ du cube proposé; on fera donc le quarré $a^2+2ab+b^2$ de la somme $a+b$ des deux premiers termes de la racine, on multipliera ce quarré par 3, ce qui fera $3a^2+6ab+3b^2$ que l'on écrira au-dessous du premier diviseur $3a^2$; on divisera le premier terme $3a^2c$ du reste du cube proposé par le premier terme $3a^2$ du diviseur $3a^2+6ab+3b^2$, & l'on aura le quotient c pour le troisieme terme de la racine, que l'on écrira à la suite du second terme b.

On écrira à la suite du diviseur le produit $3ac+3bc$ fait de la multiplication du triple du troisieme terme c de la racine par la somme $a+b$ des deux premiers termes, & à la suite de ce produit on écrira le quarré c^2 du troisieme terme c; ce qui fera en tout $3a^2+6ab+3b^2+3ac+3bc+c^2$. On multipliera cette quantité par le troisieme terme c de la racine, ce qui produira la quantité $3a^2c+6abc+3b^2c$

$+3ac^2+3bc^2+c^3$, qui contient évidemment trois fois le quarré de la ſomme $a+b$ des deux premiers termes de la racine multiplié par le troiſieme terme c, trois fois le quarré du troiſieme terme c multiplié par la ſomme $a+b$ des deux premiers termes, plus le cube du troiſieme terme c; on écrira les termes de ce produit avec des ſignes contraires, pour les ſouſtraire, ſous le reſte $3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$ du cube propoſé: on réduira, & comme après la réduction il ne reſtera rien, on conclura que la racine cubique du cube propoſé eſt exactement $a+b+c$, puiſqu'il ne reſte rien de ce cube après en avoir retranché tous les produits qui compoſent le cube du trinome $a+b+c$.

Que ſi après cette troiſieme opération, il fût reſté des termes dans le cube propoſé, la racine cubique demandée auroit eu plus de trois termes, & l'on eût déterminé le quatrieme en diviſant ce qui ſeroit reſté du cube propoſé par le triple du quarré de la ſomme des trois premiers termes de la racine, & ainſi de ſuite.

ARTICLE III.

PROBLÊME.

Extraire la racine cubique d'un nombre quelconque, exprimé par plus de trois chiffres, ou celle du plus grand cube contenu dans ce nombre.

Pour préparer aux opérations que demande l'extraction de la racine cubique des nombres, on commencera par déterminer en général le nombre de chiffres de la racine, relativement au nombre des chiffres qui exprimeront le nombre propoſé, pour en extraire la racine cubique. Enſuite on examinera les parties qui compoſent le cube d'un nombre exprimé par tant de chiffres

chiffres que l'on voudra, & l'arrangement de ces parties dans le cube qu'elles compoſent.

144. 1°. On avancera cette regle. Un nombre étant exprimé par plus de trois chiffres, ſi on le partage de trois en trois caracteres, en allant de droite à gauche, ſoit que la premiere tranche à gauche ait trois chiffres, ou deux, ou un ſeulement, le nombre de ces tranches exprimera toujours le nombre des chiffres de la racine cubique du nombre propoſé, s'il eſt un cube parfait, ou le nombre des chiffres de la racine cubique du plus grand cube parfait contenu dans le nombre propoſé, ſi ce nombre n'eſt pas un cube parfait. On établira cette regle par l'induction ſuivante.

1°. Le plus petit nombre de deux tranches eſt 1|000, & la racine cubique de 1000 eſt le nombre 10 exprimé par deux chiffres, puiſque $10 \times 10 \times 10 = 1000$. Le plus grand nombre de deux tranches eſt 999|999, & la racine cubique du plus grand cube contenu dans 999999 eſt un nombre exprimé ſeulement par deux chiffres, puiſque 100 qui eſt le plus petit nombre exprimé par trois chiffres, a pour cube 1|000|000, qui eſt un nombre compoſé de trois tranches.

Donc tout nombre de deux tranches a préciſément deux chiffres à ſa racine cubique, ou à celle du plus grand cube qu'il contient.

2°. Le plus petit nombre de trois tranches eſt 1|000|000, & la racine cubique de 100000 eſt le nombre 100 exprimé par trois chiffres.

Le plus grand nombre de trois tranches eſt 999|999|999, & la racine cubique du plus grand cube contenu dans 999999999, eſt un nombre exprimé ſeulement par trois chiffres, puiſque 1000 qui eſt le plus petit nombre exprimé par quatre chiffres, a pour cube le nombre 1|000|000|000 compoſé de quatre tranches.

Donc tout nombre composé de trois tranches a précisément trois chiffres à sa racine cubique, ou à celle du plus grand cube qu'il contient.

Et comme l'on pourra pousser cette induction aussi loin que l'on voudra, on conclura en général que la racine cubique d'un nombre, ou celle du plus grand cube qu'il contient, a autant de chiffres que ce nombre proposé a de tranches, lorsqu'on le coupe de trois en trois caracteres.

145. 2°. Pour déterminer les parties qui composent le cube d'une racine exprimée par plus d'un chiffre, on regardera cette racine comme composée seulement de deux parties; à savoir, d'un nombre de dizaines exprimé par tant de chiffres que l'on voudra, & d'un nombre d'unités exprimé par un seul chiffre, & l'on désignera la premiere partie par p, & la seconde par q.

Dans cette supposition le cube de $p+q$ représentera le cube de toute racine exprimé par plus d'un chiffre, & en montrera la composition.

Or le cube de $p+q$ est $p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$, & son premier terme p^3 représente le cube de la premiere partie p de la racine.

Le second terme $3p^2q$ représente le produit fait de la multiplication du triple du quarré de la premiere partie p de la racine multiplié par la seconde partie q.

Le troisieme terme $3pq^2$ représente le produit fait de la multiplication du triple du quarré de la seconde partie q de la racine multiplié par la premiere partie p.

Le quatrieme terme q^3 représente le cube de la seconde partie q de la racine.

Donc le cube de tout nombre partagé en un nombre de dizaines, & un nombre d'unités qui contient,

1°. le cube du nombre des dizaines ; 2°. le produit de trois fois le quarré du nombre des dizaines multiplié par le nombre des unités ; 3°. le produit de trois fois le quarré du nombre des unités multiplié par les dizaines ; 4°. le cube du nombre des unités.

Par exemple, ſi l'on fait le cube du nombre 34 compoſé de 3 dizaines, & de 4 unités, ce cube renfermera,

1°. Le cube de 3 dizaines $=30\times30\times30=$ 27000

2°. Le produit de trois fois le quarré des trois dizaines multiplié par les 4 unités $=30\times30\times3\times4=$ 10800

3°. Le produit de trois fois le quarré des 4 unités multiplié par les 3 dizaines . . $=4\times4\times3\times30=$ 1440

4°. Enfin le cube des 4 unités $=4\times4\times4=$ 64

Et le cube de 34 ſera en tout . . . 39304

146. 3°. Quant à l'arrangement des parties qui compoſent le cube d'une racine exprimée par plus d'un chiffre, il ſera fort aiſé de le déduire des degrés des unités de ces parties.

$10\times10\times10=1000$, donc le cube d'un nombre de dizaines eſt un nombre de mille qui aura trois places à ſa droite.

Le quarré d'un nombre de dizaines eſt un nombre de centaines, & le triple du quarré d'un nombre de dizaines multiplié par un nombre d'unités eſt encore un nombre de centaines qui aura deux places à ſa droite.

Le quarré d'un nombre d'unités eſt un nombre d'unités, & le triple du quarré d'un nombre d'unités eſt encore un nombre d'unités, lequel étant multiplié par un nombre de dizaines devient un nombre de dizaines qui aura une place à ſa droite.

Le cube d'un nombre d'unités eſt un nombre d'unités qui n'aura par conſéquent aucune place à ſa droite.

Ainſi ſi l'on propoſe, par exemple, le cube 39304, dont la racine 34 eſt compoſée de 3 dizaines & de 4 unités, & que l'on partage ce cube de trois en trois caracteres en allant de droite à gauche de cette ſorte . . . . . 39|304

27 . . .
108 . .
144 .
64

On dira, 1°. que le cube 27 des trois dizaines de la racine 34, eſt dans la tranche 39 la premiere à gauche, parce qu'il doit avoir trois places à ſa droite pour exprimer un nombre de mille.

On dira, 2°. que le produit 108 fait de la multiplication du triple du quarré des 3 dizaines de la racine par les 4 unités, ne va pas plus loin que le chiffre 3, le premier à gauche dans la ſeconde tranche |304, parce que ce produit doit avoir deux places à ſa droite pour exprimer un nombre de centaines.

On dira, 3°. que le produit 144 fait de la multiplication du triple du quarré des 4 unités par les dizaines, n'ira pas plus loin que o le ſecond chiffre dans la tranche |304, parce que ce produit doit avoir un rang à ſa droite pour exprimer un nombre de dizaines.

On dira, 4°. que le cube 64 des 4 unités de la racine, n'ayant aucune place à ſa droite, terminera vers la droite le cube propoſé.

Connoiſſant bien l'arrangement des parties qui compoſent le cube d'une racine exprimée par deux chiffres, on déterminera aiſément les deux chiffres de cette racine lorſque le cube ſera propoſé, & auſſitôt

que l'on ſçaura extraire une racine cubique exprimée par deux chiffres, il ſera facile d'extraire une racine compoſée de tant de chiffres que l'on voudra, comme on le verra dans les exemples ſuivans.

EXEMPLE I.

147. *Extraire la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre* 41135.

OPÉRATIONS.

	Nombre propoſé.	Racine.
I. opération.	41 | 135	34
	27	Diviſeur.
II. opération.	14 | 135	27
	41 135	
	39 304	
Reſte	1 831	

On partagera le nombre propoſé de trois en trois caracteres en allant de droite à gauche; cette préparation fera connoître que la racine cherchée aura deux caracteres, parce que le nombre propoſé eſt compoſé de deux tranches. (n°. 144).

Pour déterminer les deux chiffres de la racine, on conſidérera que le plus grand cube contenu dans le nombre propoſé, contient le cube du chiffre des dizaines de la racine cherchée, le produit de trois fois le quarré du chiffre des dizaines multiplié par les unités, trois fois le quarré du chiffre des unités multiplié par les dizaines, plus le cube du chiffre des unités. (n°. 145).

Or, 1°. le cube du chiffre des dizaines ayant trois places à ſa droite, ſera dans la tranche 41 la premiere à gauche; ainſi on aura le chiffre des dizaines de la

racine en prenant la racine cubique du plus grand cube contenu dans la tranche 41.

On dira donc le plus grand cube contenu dans 41 eſt 27, dont la racine cubique eſt 3, & l'on écrira 3 dans le crochet, pour le chiffre des dizaines de la racine.

On retranchera de la tranche 41 le plus grand cube 27 qu'elle contient, il reſtera le nombre 14, à la droite duquel on abaiſſera la ſeconde tranche 135, & le nombre propoſé ſera réduit à 14|135, qui doit encore contenir trois fois le quarré des 3 dizaines de la racine multiplié par le chiffre inconnu des unités, plus trois fois le quarré de ce chiffre des unités multiplié par le chiffre 3 des dizaines, plus le cube du chiffre des unités.

2°. Trois fois le quarré du chiffre 3 des dizaines multiplié par le chiffre inconnu des unités, ayant deux places à ſa droite, ſera dans la partie 14|1 du reſte 14|135 du nombre propoſé : mais le produit fait de la multiplication de trois fois le quarré des dizaines par le chiffre des unités, étant diviſé par l'un de ſes produiſans, à ſavoir, par le triple du quarré des dizaines, on doit avoir au quotient l'autre produiſant; à ſavoir, le chiffre des unités.

On fera donc le quarré 9 du chiffre 3 des dizaines, on multipliera ce quarré par 3, ce qui fera 27, que l'on écrira à la place deſtinée aux diviſeurs; on diviſera 14|1 par 27, ce qui donnera le quotient 4 que l'on ne prendra pour le chiffre des unités de la racine qu'après l'épreuve ſuivante.

On fera le cube du nombre 34 compoſé du chiffre 3 des dizaines de la racine & du quotient 4 écrit à la droite du chiffre 3; & comme le nombre 39304 qui viendra, peut être retranché du nombre propoſé 41|135, on prendra le quotient 4 pour le chiffre des

unités de la racine ; c'eſt-à-dire, qu'on l'écrira à la racine au rang des unités, & la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé, ſera 34.

A préſent, pour déterminer l'excès du nombre propoſé 41|135 ſur le cube de la racine trouvée 34, on retranchera de ce nombre propoſé le cube 39 304 de la racine 34, & il viendra 1831 pour l'excès cherché.

Que ſi le cube de la racine trouvée 34 eût été plus grand que le nombre propoſé 41135, il auroit fallu diminuer continuellement de l'unité la racine 34, juſqu'à ce que l'on fût parvenu à une racine dont le cube eût pû être ſouſtrait du nombre propoſé.

REMARQUE.

148. *On déduira de l'extraction que l'on vient de faire, cette méthode générale pour extraire la racine cubique du plus grand cube contenu dans un nombre compoſé de deux tranches ſeulement.*

1°. L'on prendra la racine cubique du plus grand cube contenu dans la premiere tranche à gauche, cette racine ſera le chiffre des dizaines de la racine.

2°. Ayant retranché de la premiere tranche à gauche le cube du premier chiffre de la racine, c'eſt-à-dire, le plus grand cube qu'elle contient, & ayant abaiſſé la ſeconde tranche à la droite du reſte, on diviſera par trois fois le quarré du chiffre des dizaines de la racine, le nombre formé du premier chiffre à gauche dans la ſeconde tranche, & du reſte de la premiere tranche ; & l'on prendra, comme on l'a expliqué, une partie convenable du quotient pour le chiffre des unités de la racine, & l'on déterminera enſuite l'excès du nombre propoſé ſur le cube de la racine trouvée.

On fera le cube du nombre 345, compoſé du nombre 34 des dizaines de la racine, & du quotient 5 écrit à la droite de 34; & comme le nombre 41 063 625 qui viendra, peut être retranché du nombre propoſé 41|135|081, on prendra le quotient 5 pour le troiſieme chiffre de la racine; & la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé, ſera 345.

A préſent, pour déterminer de combien le nombre propoſé ſurpaſſe le cube de la racine trouvée 345, on retranchera du nombre propoſé le cube de la racine trouvée, qui eſt 41 063 625, & il viendra 7 1456, pour l'excès cherché.

Que ſi le cube de 345 eût été plus grand que le nombre propoſé, il auroit fallu diminuer continuellement 345 de l'unité, juſqu'à ce que l'on fût parvenu à une racine dont le cube eût pu être ſouſtrait du nombre propoſé.

REMARQUE.

150. *En général, lorſqu'un nombre propoſé pour en extraire la racine cubique renfermera trois tranches, on déterminera les trois caracteres de la racine cubique demandée, en opérant comme il ſuit.*

1°. On extraira la racine cubique du plus grand cube contenu dans les deux premieres tranches, comme ſi le nombre propoſé ne renfermoit que ces deux tranches.

2°. On diviſera par trois fois le quarré du nombre trouvé des dizaines, le nombre formé du premier chiffre à gauche dans la troiſieme tranche, & du reſte des deux premieres tranches: l'on prendra une partie convenable du quotient pour le troiſieme chiffre de la racine, & l'on déterminera enſuite l'excès du nombre propoſé ſur le cube de la racine trouvée.

EXEMPLE III.

151. *Extraire la racine cubique du nombre* 41135081408.

OPÉRATIONS.

	Cube proposé.	Racine.
I. opération.	41|135|081|408 27	3452 I. diviseur.
II. opération.	14|135 41|135 39304	27 II. diviseur.
III. opération.	1831|081 41|135|081 41063625	3468 III. diviseur.
IV. opération.	71456408 41|135|081|408 41135081408	357075
	00000000000	

On partagera le cube proposé en tranches, & à cause des quatre tranches qu'il renferme, on conclura que la racine cherchée aura quatre caracteres. (n°. 144).

Pour déterminer les quatre caracteres de la racine, on considérera que cette racine étant regardée comme composée d'un nombre de dizaines exprimé par trois chiffres, & d'un nombre d'unités simples exprimé par un seul chiffre, son cube renfermera le cube du nombre des dizaines, trois fois le quarré du nombre des dizaines multiplié par les unités, trois fois le quarré du nombre des unités multiplié par les dizaines, plus le cube des unités. (n°. 145).

Or, 1°. le cube du nombre des dizaines ayant trois places à sa droite, sera contenu dans les tranches

41|135|081, les trois premieres à gauche dans le nombre proposé : ainsi on connoîtra les trois chiffres du nombre des dizaines de la racine, en extrayant la racine cubique du plus grand cube contenu dans les tranches 41|135|081, comme l'on a fait dans l'exemple précédent.

En faisant l'opération on trouvera 345 pour la racine cubique du plus grand cube contenu dans 41|135|081, & 71 456 pour le reste de cette extraction ; ainsi le nombre des dizaines de la racine cherchée est 345.

On abaissera la quatrieme tranche 408 à la droite du reste 71 456, & le cube proposé diminué du plus grand cube contenu dans les trois premieres tranches, sera réduit au nombre 71456|408, qui doit contenir encore trois fois le quarré du nombre 345 des dizaines de la racine multiplié par le chiffre inconnu des unités, trois fois le quarré du chiffre des unités multiplié par le nombre 345 des dizaines, plus le cube du chiffre des unités.

2°. Le produit fait de trois fois le quarré du nombre 345 des dizaines de la racine multiplié par le chiffre des unités ayant deux places à sa droite, sera dans la partie 71456|4 du nombre 71456|408, auquel le cube proposé est réduit.

Mais le produit fait de la multiplication de trois fois le quarré du nombre des dizaines par le chiffre des unités étant divisé par l'un de ses produisans, à sçavoir, par trois fois le quarré du nombre des dizaines, on doit avoir au quotient l'autre produisant, à sçavoir, le chiffre des unités ; on fera donc le quarré du nombre 345 des dizaines de la racine, on le multipliera par 3, ce qui donnera 357075, que l'on écrira au-dessous du second diviseur ; on divisera 71456|4 par 357075, ce qui donnera le quotient 2.

On écrira le quotient 2 à la droite du nombre 345 des dizaines de la racine, ce qui fera le nombre 3452 que l'on élevera au cube ; & comme le nombre 41135081408 qui viendra eſt égal au cube propoſé, on conclura que le quotient 2 eſt le chiffre des unités de la racine, & que la racine du cube propoſé eſt exactement 3452, puiſque le cube de 3452 eſt égal au cube propoſé.

REMARQUE.

152. *En général, lorſqu'un nombre ſera compoſé de quatre tranches, on déterminera ſa racine cubique, ou celle du plus grand cube qu'il contient, en opérant comme il ſuit.*

1°. On extraira la racine cubique du plus grand cube contenu dans les trois premieres tranches à gauche, comme ſi le nombre propoſé n'étoit compoſé que de ces trois tranches.

2°. On diviſera par le triple du quarré du nombre des dizaines de la racine, le nombre formé du premier chiffre dans la quatrieme tranche, & du reſte des trois premieres tranches ; & l'on prendra une partie convenable de ce quotient.

Que ſi le nombre propoſé pour en extraire la racine cubique étoit compoſé de 5 tranches, la racine cubique ſeroit compoſée de 5 chiffres ; & pour la déterminer on prendroit d'abord la racine cubique du plus grand cube contenu dans les quatre premieres tranches à gauche, comme l'on a fait dans l'exemple précédent, ce qui donneroit les quatre premiers chiffres de la racine ; enſuite on diviſeroit, par trois fois le quarré de cette premiere partie de la racine, le nombre formé & du premier chiffre à gauche dans la cinquieme tranche, & du reſte des quatre premieres tranches ; & le quotient, ou une partie convena-

ble de ce quotient, ſeroit le cinquieme chiffre de la racine, & ainſi de ſuite.

ARTICLE IV.

PROBLÊME.

153. *Extraire la racine cubique d'une fraction.*

SOLUTION.

On éleve une fraction au cube en faiſant une nouvelle fraction, dont le numérateur eſt le cube du numérateur de la fraction propoſée, & dont le dénominateur eſt le cube du dénominateur de cette même fraction propoſée. (n°. 118).

Donc en général la racine cubique d'une fraction doit être une nouvelle fraction qui ait pour numérateur la racine cubique du numérateur de la fraction propoſée, & pour dénominateur la racine cubique du dénominateur de la même fraction propoſée.

Si le numérateur & le dénominateur de la fraction propoſée ſont des cubes parfaits, on aura exactement la racine cubique de cette fraction.

Par exemple, ſi l'on demande la racine cubique de la fraction $\frac{27}{64}$, dont le numérateur & le dénominateur ſont des cubes parfaits, on aura en prenant la racine cubique 3 du numérateur 27, & la racine cubique 4 du dénominateur 64, la fraction $\frac{3}{4}$, qui ſera, ſans aucun reſte, la racine demandée.

Si le dénominateur de la fraction eſt un cube parfait, & le numérateur un cube imparfait, on fera une nouvelle fraction dont le dénominateur ſoit la racine cubique du dénominateur de la fraction propoſée, & dont le numérateur ſoit la racine cubique du plus grand cube contenu dans le numérateur de la même fraction propoſée.

Par exemple, si l'on demande la racine cubique de la fraction $\frac{28}{64}$, dont le dénominateur 64 est cube parfait, & dont le numérateur 28 est un cube imparfait, on prendra la racine cubique du dénominateur 64, laquelle est 4, & la racine cubique 3 du plus grand cube 27 contenu dans le nombre 28; & l'on fera la fraction $\frac{3}{4}$ qui sera, à peu de chose près, la racine cubique de la fraction $\frac{28}{64}$.

Si aucun des termes de la fraction dont on veut extraire la racine cubique, n'est un cube parfait, on multipliera ses deux termes par le quarré de son dénominateur, ce qui donnera une nouvelle fraction de même valeur que la proposée (n°. 95), & dont le dénominateur sera un cube parfait; & par conséquent on pourra en extraire la racine cubique, comme l'on vient de le dire.

Par exemple, si l'on propose d'extraire la racine cubique de la fraction $\frac{3}{4}$, dont aucun des termes n'est un cube parfait, on multipliera ses deux termes 3 & 4 par le quarré 16 du dénominateur 4, & l'on aura la nouvelle fraction $\frac{48}{64}$ égale à la fraction proposée $\frac{3}{4}$, & dont la racine cubique sera $\frac{3}{4}$, à peu de chose près.

ARTICLE V.

PROBLÊME.

154. *Connoître si la racine cubique que l'on aura extraite d'un nombre proposé qui n'est pas un cube parfait, est celle du plus grand cube contenu dans ce nombre, ou si cette racine ne pourroit pas être augmentée de l'unité.*

SOLUTION.

Lorsque l'excès du nombre proposé sur le cube de la racine trouvée est considérable, on doit chercher si la racine trouvée ne pourroit pas être augmentée

de l'unité. Pour le connoître, on propoſera cette regle.

Si le reſte de l'opération, c'eſt-à-dire, l'excès du nombre propoſé ſur le cube de la racine trouvée eſt moindre que la ſomme de trois fois le quarré de la racine trouvée, de trois fois cette racine & de l'unité, la racine trouvée ne pourra pas être augmentée de l'unité.

Si le reſte de l'opération n'eſt pas moindre que la ſomme de trois fois le quarré de la racine trouvée, de trois fois cette racine & de l'unité, on pourra augmenter de l'unité la racine trouvée.

Cette regle eſt fondée ſur cette propoſition.

Lorſque deux racines, par exemple, $a+1$ & a different de l'unité, le cube de la plus grande racine ſurpaſſe le cube de la plus petite d'une quantité égale à trois fois le quarré de cette plus petite racine, à trois fois cette moindre racine, plus à l'unité.

Que l'on faſſe en

effet le cube . . $\left.\begin{matrix}a^3+3a^2+3a+1\end{matrix}\right\}$ de $\left\{\begin{matrix}a+1\end{matrix}\right.$ (142)

& le cube . . . $\left.\begin{matrix}a^3\end{matrix}\right\}$ de $\left\{\begin{matrix}a\end{matrix}\right.$

l'excès du cube a^3+3a^2+3a+1 ſur a^3 eſt évidemment $3a^2+3a+1$, c'eſt-à-dire, trois fois le quarré de la moindre racine, trois fois cette moindre racine, plus l'unité.

Ainſi, lorſque le reſte de l'extraction vaudra trois fois le quarré de la racine trouvée, plus trois fois cette racine, plus l'unité, on conclura que la racine trouvée eſt moindre de l'unité qne la racine du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé, & par conſéquent il faudra augmenter la racine trouvée de l'unité.

155. On voit donc, 1°. que lorſque l'on a trouvé la racine cubique du plus grand cube contenu dans un nombre propoſé, le reſte de l'opération eſt toujours moindre que la ſomme de trois fois le quarré de

de la racine trouvée, de trois fois cette racine & de l'unité ; autrement on pourroit augmenter de l'unité la racine trouvée, & par conſéquent l'on n'auroit pas extrait la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé.

156. 2°. Lorſque l'on a extrait la racine cubique du plus grand cube contenu dans un nombre propoſé, il ne s'en faut pas 1 que l'on ait la véritable racine du nombre propoſé : car ſi l'on en étoit éloigné de l'unité, le reſte de l'opération vaudroit au moins trois fois le quarré de la racine trouvée, plus trois fois cette racine, plus l'unité, ce qui eſt impoſſible lorſque l'on a extrait la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé. (n°. 155).

157. 3°. Lorſqu'on a extrait la racine cubique du plus grand cube contenu dans une fraction dont le dénominateur eſt un cube parfait, & le numérateur un cube imparfait, le défaut de la racine trouvée eſt toujours moindre qu'une unité fractionnaire de même dénomination que celle de la racine trouvée.

Par exemple, la racine cubique $\frac{3}{4}$ du plus grand cube parfait contenu dans la fraction $\frac{28}{64}$, ne differe pas de $\frac{1}{4}$ de la vraie racine cubique de $\frac{28}{64}$: car puiſque la racine cubique 3 du plus grand cube contenu dans le numérateur 28, ne differe pas de 1 de la vraie racine cubique du numérateur 28, (n°. 156) il eſt évident que la vraie racine cubique de $\frac{28}{64}$ eſt moindre que $\frac{4}{4}$; & par conſéquent la vraie racine de $\frac{28}{64}$ ne ſurpaſſe pas de $\frac{1}{4}$ la racine trouvée $\frac{3}{4}$.

En général, lorſqu'on extrait la racine cubique du plus grand cube contenu dans une fraction dont le dénominateur eſt un cube parfait & le numérateur un cube imparfait, le défaut de la racine trouvée eſt toujours moindre que l'une des unités fractionnaires de cette racine trouvée.

ARTICLE VI.

PROBLÊME.

158. *Approcher de ſi près que l'on voudra de la racine cubique d'un nombre qui n'eſt pas un cube parfait.*

SOLUTION.

On propoſera, par exemple, de faire enſorte que la racine trouvée differe de la racine exacte d'une quantité moindre qu'un dixieme, un centieme, un millieme, un dix millieme, un cent millieme, &c. de l'unité; & pour découvrir la méthode de cette approximation, on conſidérera que lorſqu'on extrait la racine cubique d'une fraction dont le dénominateur eſt un cube parfait & le numérateur un cube imparfait, le défaut de la racine eſt moindre qu'une des unités fractionnaires de la racine trouvée (n°. 157), & par conſéquent ce défaut eſt moindre qu'un dixieme, un centieme, un millieme, &c. de l'unité, lorſque le dénominateur de la racine trouvée eſt 10, ou 100, ou 1000, &c. ou lorſque le dénominateur de la fraction propoſée eſt le cube de 10, ou de 100, ou de 1000, &c.

Donc pour extraire la racine cubique d'un nombre qui n'eſt pas un cube parfait, de façon que la racine trouvée differe de la vraie racine d'une quantité moindre qu'un dixieme, ou un centieme, ou un millieme, &c. de l'unité, il faudra changer le cube imparfait propoſé en une fraction (n°. 89), dont le dénominateur ſoit le cube de 10, ou le cube de 100, ou le cube de 1000, &c. & prendre enſuite la racine cubique de cette fraction. (n°. 153).

Par exemple, pour extraire la racine cubique du nombre 24, de façon que le défaut de la racine ſoit

moindre qu'un centieme de l'unité, on fera le cube de 100, lequel eſt 1000000; & ayant changé 24 dans la fraction $\frac{24000000}{1000000}$, dont le dénominateur eſt le cube de 100, & dont le numérateur eſt le produit du cube imparfait 24 multiplié par le cube de 100, on fera la fraction $\frac{280}{100}$, dont le numérateur eſt la racine cubique du plus grand cube contenu dans le numérateur 24000000, & dont le dénominateur eſt la racine cubique du dénominateur 1000000, & cette fraction $\frac{280}{100} = 2 + \frac{4}{5}$, ne ſera pas éloignée de la vraie racine de 24 d'un centieme de l'unité.

159. Pour approcher de ſi près que l'on voudra de la vraie racine cubique d'une fraction, 1°. on changera la fraction propoſée en une autre dont le dénominateur ſoit un cube parfait (n°. 153), (ſi le dénominateur de la propoſée n'en eſt pas un); 2°. on multipliera les deux termes de cette nouvelle fraction par le cube de 10, ou de 100, ou de 1000, &c. ſelon que l'on voudra que le défaut de la racine ſoit moindre qu'un dixieme, ou qu'un centieme, ou qu'un millieme, &c. de l'unité fractionnaire; 3°. enfin on extraira la racine cubique de cette derniere fraction.

Par exemple, ſi l'on propoſe d'extraire la racine cubique de la fraction $\frac{3}{4}$, de façon que le défaut de la racine ſoit moindre qu'un centieme de l'unité fractionnaire de même dénomination que $\frac{3}{4}$.

1°. Comme le dénominateur de la fraction propoſée n'eſt pas un cube parfait, on multipliera ſes deux termes par le quarré 16 du dénominateur 4, & l'on aura $\frac{48}{64} = \frac{3}{4}$ (n°. 95).

2°. On multipliera les deux termes $\frac{48}{64}$ par le cube de 100, lequel eſt 1000000, & l'on aura encore $\frac{48000000}{64000000} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$.

3°. On extraira la racine cubique du numérateur 48000000, & celle du dénominateur 64000000

l'on aura $\frac{362}{400} = \frac{3}{4} + \frac{62}{400}$ pour la racine approchée de $\frac{3}{4}$, de façon que le défaut de cette racine ne ſera pas de $\frac{1}{100}$ de l'unité fractionnaire $\frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{400}$ de l'unité entiere.

REMARQUE.

160. *Un cube imparfait quelconque, repréſenté par* a, *étant transformé en fraction d'un dénominateur cube, quelque grand que l'on voudra, repréſenté, par exemple, par* x^3, *le réſultat* $\frac{ax^3}{x^3}$ *ſera encore un cube imparfait : car* $\frac{ax^3}{x^3}$ *étant égal à la quantité* a, *& cette quantité* a *étant un cube imparfait par la ſuppoſition, il eſt néceſſaire que la fraction* $\frac{ax^3}{x^3}$ *ſoit auſſi un cube imparfait ; & par conſéquent en extrayant la racine cubique de la fraction* $\frac{ax^3}{x^3}$, *il y aura encore un reſte, autrement cette fraction ſeroit un cube parfait.*

SECTION IV.

Les produits des grandeurs multipliées par elles-mêmes, & les unes par les autres.

PROPOSITION I.

161. *Le quarré de la ſomme de deux grandeurs eſt égal à la ſomme des quarrés de ces grandeurs, plus à deux produits de l'une par l'autre.*

CAR de deux grandeurs quelconques, l'une étant déſignée par a, & l'autre par b, leur ſomme ſera $a+b$.

Or ſi on éleve le binome $a+b$ au quarré, on trouve $a^2+2ab+b^2$ (n°. 121), & la partie a^2+b^2 de ce quarré, eſt évidemment la ſomme des quarrés des grandeurs a & b, & la partie $2ab$ eſt le double du produit de la premiere grandeur a multiplié par la ſeconde b.

Donc, &c.

PROPOSITION II.

162. *Le quarré de la différence de deux grandeurs eſt égal à la ſomme de leurs quarrés, moins deux produits de l'une par l'autre.*

Car de deux grandeurs quelconques, l'une étant déſignée par a, & l'autre par b, leur différence ſera $a-b$, ou $b-a$.

Or en élevant au quarré la différence $a-b$, ou $b-a$, on trouve $a^2-2ab+b^2$, & la partie a^2+b^2 de ce quarré eſt évidemment la ſomme des quarrés des grandeurs a, b, & la partie $-2ab$ exprime la ſouſtraction du double du produit des grandeurs a, b multipliées l'une par l'autre.

Donc le quarré de la différence de deux grandeurs eſt égal à la ſomme des quarrés de ces grandeurs, diminuée du double du produit de l'une par l'autre.

PROPOSITION III.

163. *Le produit de la ſomme de deux grandeurs multipliées par leur différence, eſt égal à la différence des quarrés de ces grandeurs.*

Car en déſignant par a l'une des deux grandeurs quelconques, & l'autre par b, leur ſomme ſera $a+b$, & leur différence $a-b$.

Or en multipliant $a+b$ par $a-b$, on trouve $a^2+ab-ab-b^2$, ce qui ſe réduit à la grandeur

$a^2 - b^2$, qui eſt évidemment la différence des quarrés des grandeurs a & b.

PROPOSITION. IV.

164. *Si deux grandeurs ſont inégales, la moitié de leur ſomme, plus la moitié de leur différence, eſt égale à la plus grande; & la moitié de leur ſomme, moins la moitié de leur différence, eſt égale à la plus petite. C'eſt-à-dire, qu'en nommant* x *la plus grande des deux grandeurs quelconques,* y *la plus petite,* a *leur ſomme,* d *leur différence, on aura* . . . $\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{d}{2} \\ y = \frac{a}{2} - \frac{d}{2} \end{cases}$

Pour s'en convaincre, on conſidérera qu'en retranchant de la ſomme a la différence d, ou l'excès de la grandeur x ſur la grandeur y, le reſte $a - d$ renfermera la grandeur y, plus la grandeur x, moins l'excès de cette grandeur x ſur la grandeur y, & par conſéquent ce reſte $a - d$ renfermera deux quantités égales chacune à la grandeur y.

Donc, 1°. . . . . $y = \frac{a-d}{2} = \frac{a}{2} - \frac{d}{2}$;

c'eſt-à-dire, que l'on aura la grandeur y en prenant la moitié de la quantité $a - d$, ou la moitié de la ſomme a, moins la moitié de la différence d.

Donc, 2°. $x = \frac{a-d}{2} + d = \frac{a-d+2d}{2} = \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$;

c'eſt-à-dire, que l'on aura la grandeur x en prenant l'autre moitié de la quantité $a - d$, & en ajoutant la différence d, ce qui ſe réduit à prendre la moitié de la ſomme a, & la moitié de la différence d.

Donc . . . . . $\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{d}{2} \\ y = \frac{a}{2} - \frac{d}{2} \end{cases}$

PROPOSITION V.

165. *Le produit de deux grandeurs eſt égal au quarré de la moitié de leur ſomme, moins le quarré de leur demi-différence.*

C'eſt-à-dire, qu'en général la ſomme de deux grandeurs x, y, *étant déſignée par* a, *& leur différence par* d, *on aura* . . . . . $xy = \frac{a^2}{4} - \frac{d^2}{4}$.

Car la ſomme des grandeurs x, y étant déſignée par a, & leur différence par d, en ſuppoſant x plus grand que y, on aura . . . $\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{d}{2} \\ y = \frac{a}{2} - \frac{d}{2} \end{cases}$

& par conſéquent $x \times y = \overline{\frac{a}{2} + \frac{d}{2}} \times \overline{\frac{a}{2} - \frac{d}{2}} = \frac{a^2}{4} - \frac{ad}{4} + \frac{ad}{4} - \frac{d^2}{4}$, ce qui donnera, en la réduiſant, $xy = \frac{a^2}{4} - \frac{d^2}{4}$.

CHAPITRE SEPTIEME.

Le calcul des Puiſſances par les Expoſans ; le calcul des Grandeurs radicales, & l'élévation des Grandeurs aux Puiſſances quelconques.

SECTION PREMIERE.

Calcul des Puiſſances par les Expoſans.

DÉFINITIONS.

LES puiſſances dont il ſera queſtion ſont les grandeurs dont les différens degrés ſont marqués par des expoſans.

166. Des opérations que l'on fait ſur les puiſſances déſignées par des expoſans, réſultent différentes ſortes d'expoſans : il en eſt de poſitifs, de négatifs, d'entiers & de fractionnaires.

Diſtinguant les puiſſances par les expoſans, on entendra par le terme ſimple de *puiſſance*, celle dont l'expoſant eſt un nombre entier & poſitif : telle eſt la puiſſance a^2 ; telle eſt en général la puiſſance a^n, en déſignant tout expoſant entier par l'indéterminée n.

On nommera *puiſſance fractionnaire* celle dont l'expoſant eſt une fraction ; telle eſt la puiſſance $a^{\frac{2}{3}}$, & en général $a^{\frac{m}{n}}$.

On nommera *puiſſance poſitive* celle dont l'expoſant entier ou fractionnaire eſt poſitif.

Enfin on nommera *puiſſance négative* celle dont

l'expoſant entier ou fractionnaire eſt négatif : telles ſont en général les puiſſances a^{-m}, $a^{-\frac{m}{n}}$.

Calculer les puiſſances par les expoſans, c'eſt déterminer,

1°. L'expoſant du produit, lorſqu'on multiplie une puiſſance d'une grandeur par une autre puiſſance quelconque de la même grandeur.

2°. L'expoſant du quotient, lorſque l'on diviſe une puiſſance d'une grandeur par une autre puiſſance de la même grandeur.

3°. L'expoſant du réſultat, lorſqu'on éleve une puiſſance d'une grandeur à une autre puiſſance d'un expoſant quelconque donné.

4°. L'expoſant du réſultat, lorſqu'on extrait la racine quelconque d'une grandeur élevée à une puiſſance quelconque.

Tout ce calcul eſt fondé ſur les propoſitions ſuivantes.

ARTICLE I.

PROPOSITION I.

167. *Si l'on multiplie une puiſſance d'une grandeur par une autre puiſſance de la même grandeur, l'expoſant du produit ſera égal à la ſomme des expoſans du multiplicande & du multiplicateur.*

C'eſt-à-dire, qu'en général $x^m \times x^n = x^{m+n}$.

Car en ſuppoſant l'expoſant $m = 3$, & l'expoſant $n = 2$, on aura $x^m \times x^n = x^3 \times x^2 = xxx \times xx = x^5$ (73) $= x^{3+2}$.

Donc . . . . . $x^3 \times x^2 = x^{3+2}$.

Et en donnant toute autre valeur aux expoſans m, n, on trouvera également que le produit de deux puiſſances de la même grandeur multipliée l'une par l'au-

re, a pour expoſant la ſomme des expoſans des deux produiſans.

Donc en général $x^m \times x^n = x^{m+n}$.

PROPOSITION II.

168. *Si l'on diviſe une puiſſance d'une grandeur par une autre puiſſance de la même grandeur, l'expoſant du quotient ſera égal à la différence de l'expoſant du dividende, & de celui du diviſeur.*

C'eſt-à-dire, qu'en général a^m *diviſé par* $a^n = a^{m-n}$.

Car le quotient a^{m-n} multiplié par le diviſeur a^n, donne a^{m-n+n} (n°. 167) = le dividende a^m.

REMARQUE.

169. *De cette propoſition qui n'eſt qu'une ſuite de la précédente touchant la maniere d'exprimer le produit de deux puiſſances de la même grandeur, il ſuit que l'expoſant du quotient eſt poſitif, ou zero, ou négatif, ſelon que l'expoſant du dividende eſt plus grand que l'expoſant du diviſeur, ou qu'il lui eſt égal, ou qu'il eſt plus petit.*

EXEMPLES.

Du I. cas. $\frac{a^{3m}}{a^m} = a^{3m-m} = a^{2m}$

Du II. cas. $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$

Du III. cas. $\frac{a^m}{a^{3m}} = a^{m-3m} = a^{-2m}$

On voit donc que de la diviſion des puiſſances par les expoſans, il vient des puiſſances zero & des puiſſances négatives : la propoſition ſuivante fera connoître la valeur de ces ſortes de puiſſances.

PROPOSITION III.

170. *Toute quantité dont l'expoſant eſt zero, ſe réduit à l'unité.*

Et toute quantité dont l'exposant est négatif, est égale à une fraction qui a l'unité pour numérateur, & pour dénominateur la même quantité avec un exposant positif égal à l'exposant négatif proposé.

C'est-à-dire, 1°. qu'en général $a^0 = 1$.

Car en multipliant a^0 & 1 par la même grandeur a, il vient le même produit a.

En effet $a^0 \times a = a^0 \times a^1 = a^{0+1}$ (n°. 167) $= a$, & $1 \times a = 1a = a$.

C'est-à-dire, 2°. qu'en général $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Car en multipliant chacune des expressions a^{-m}, $\frac{1}{a^m}$ par une même puissance de a plus élevée que m, par exemple, par a^{2m}, il vient le même produit.

En effet $a^{-m} \times a^{2m} = a^{-m+2m}$ (n°. 167) $= a^m$, & $\frac{1}{a^m} \times a^{2m} = \frac{a^{2m}}{a^m}$ (n°. 93) $= a^{2m-m}$ (n°. 168) $= a^m$.

Donc . . . $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

REMARQUE.

171. *Si la quantité dont l'exposant est négatif a un coefficient différent de l'unité, elle sera égale à une fraction qui aura ce coefficient pour numérateur, & pour dénominateur cette quantité avec un exposant positif égal à son exposant négatif.*

C'est-à-dire, qu'en général $df^{-m} = \frac{d}{f^m}$.

Car $df^{-m} = d \times f^{-m} = d \times \frac{1}{f^m}$ (n°. 170.)

Or . . . . . $d \times \frac{1}{f^m} = \frac{d}{f^m}$ (n°. 102.)

Donc . . . . $df^{-m} = \frac{d}{f^m}$.

PROPOSITION IV.

172. *Si on éleve une puiſſance d'une grandeur à une autre puiſſance dont l'expoſant ſoit donné, l'expoſant du réſultat, c'eſt-à-dire de la nouvelle puiſſance, ſera égal au produit de l'expoſant de la puiſſance donnée, multiplié par l'expoſant de la puiſſance demandée.*

C'eſt-à-dire, qu'en général la grandeur a^m *élevée à la puiſſance* $n = a^{mn}$.

Car pour multiplier la grandeur a^m une fois par elle-même, il faut ajouter à l'expoſant m de cette puiſſance une fois cet expoſant m (n°. 167), & par conſéquent pour multiplier la grandeur a^m par elle-même autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans l'expoſant n, il faut ajouter à l'expoſant m de cette grandeur le même expoſant m, autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans l'expoſant n; & comme cet expoſant m, eſt déja écrit une fois dans la grandeur a^m, il ſera écrit en tout, autant de fois exactement qu'il y aura d'unités dans l'expoſant n; c'eſt-à-dire, qu'en multipliant par elle-même la quantité a^m ſucceſſivement, autant de fois moins une qu'il y aura d'unités dans l'expoſant n, l'expoſant du réſultat ſera le produit mn de l'expoſant m de la grandeur a^m multiplié par l'expoſant n.

Or multiplier la grandeur a^m par elle-même ſucceſſivement autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans l'expoſant n, c'eſt élever la grandeur a^m à la puiſſance n (117).

Donc, lorſqu'on éleve une puiſſance d'une grandeur à une autre puiſſance, l'expoſant de la nouvelle puiſſance eſt égal au produit de l'expoſant de la puiſſance donnée, multiplié par l'expoſant de la puiſſance demandé.

REMARQUE.

173. *Lorſqu'une puiſſance ſera compoſée de pluſieurs produiſans, on l'élevera à une autre puiſſance en multipliant l'expoſant de chacun de ſes produiſans par l'expoſant de la puiſſance demandée.*

Par exemple, y^2z^2 élevée à la puiſſance 3 $= y^{2\times3}z^{2\times3} = y^6z^6$.

Car $y^2z^2 = yyzz$ (37).

Or $yyzz$ élevée à la puiſſance 3, donne (117) $yyzz \times yyzz \times yyzz = y^6z^6$ (37).

En général y^nz^n élevée à la puiſſance m donnera $y^{mn}z^{mn}$; & x^my^r élevée à la puiſſance n, donnera $x^{mn}y^{rn}$.

PROPOSITION V.

174. *Si l'on extrait la racine quelconque d'une grandeur élevée à une puiſſance quelconque, l'expoſant du réſultat ſera égal au quotient de la diviſion de l'expoſant de la puiſſance donnée par l'expoſant de la puiſſance demandée.*

C'eſt-à-dire, qu'en général la racine de la puiſſance $a^m = \overline{a^{\frac{m}{n}}}$.

Puiſque ſi on éleve à la puiſſance n le réſultat $\overline{a^{\frac{m}{n}}}$, on aura (n°. 172) $\overline{a^{\frac{mn}{n}}}$ = la puiſſance donnée a^m.

175. *Il ſuit de cette propoſition que lorſque l'on extrait la racine quelconque d'une puiſſance donnée, l'expoſant du réſultat eſt entier ou fractionnaire, ſelon que l'expoſant de la puiſſance donnée eſt diviſible, exactement ou non, par l'expoſant de la racine demandée.*

EXEMPLES.

Du 1er cas. La racine 2e ou quarrée de $a^4 = a^{\frac{4}{2}} = a^2$

En général la racine m de . . . $a^{mn} = a^{\frac{mn}{m}} = a^n$

Du 2e cas. La racine 3e ou cubique de $a^4 = \ldots a^{\frac{4}{3}}$

En général la racine n de . . . . $a^m = \ldots a^{\frac{m}{n}}$

REMARQUE.

176. 1°. *L'exposant de la racine demandée est évidemment un diviseur exact de l'exposant de la puissance donnée, lorsque cette puissance donnée est le produit d'une grandeur multipliée par elle-même autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans l'exposant de la racine demandée; & par conséquent lorsque le contraire arrive, c'est-à-dire, lorsque l'exposant de la racine demandée ne divise pas exactement l'exposant de la puissance donnée, cette puissance n'est pas le résultat d'une grandeur multipliée par elle-même successivement autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans l'exposant de la racine demandée.*

Une puissance fractionnaire $a^{\frac{m}{n}}$ *est donc une racine que l'on ne peut déterminer, & que l'on se contente d'indiquer; le numérateur* m *de l'exposant fractionnaire* $\frac{m}{n}$, *marque le degré de la puissance donnée, & le dénominateur* n *désigne le degré de la racine demandée.*

177. 2°. *La racine d'un degré quelconque proposé d'une puissance composée de plusieurs produisans, est le produit des racines du degré proposé de tous les produisans de cette puissance.*

C'est-à-dire, qu'en général la racine m *de la puissance* $y^n z^n = y^{\frac{n}{m}} z^{\frac{n}{m}} = y^{\frac{n}{m}} \times z^{\frac{n}{m}}$.

Ce qui est évident : car si on éleve à la puissance

m la quantité $y^{\frac{n}{m}} z^{\frac{n}{m}}$, il viendra (n°. 172) $y^{\frac{mn}{m}} z^{\frac{mn}{m}} = y^n z^n =$ la puiſſance donnée.

PROPOSITION VI.

178. *Une puiſſance ne change point lorſque l'on multiplie ſon expoſant par une quantité quelconque, & que l'on diviſe le produit par cette même quantité.*

C'eſt-à-dire, qu'en général $a^m = a^{\frac{mn}{n}}$.

Car multiplier l'expoſant m de la puiſſance a^m par l'expoſant n, & diviſer l'expoſant du réſultat a^{mn} par la même quantité n, c'eſt élever la grandeur a^m à la puiſſance n (n°. 172), & l'abaiſſer à la fois à la racine n (n°. 174); ce qui ſe réduit à la laiſſer à ſon degré m.

179. *Que ſi une puiſſance eſt fractionnaire, elle ne change pas de valeur lorſque l'on multiplie les deux termes de ſon expoſant par une même quantité.*

C'eſt-à-dire, qu'en général $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mr}{nr}}$.

Car c'eſt encore élever la grandeur $a^{\frac{m}{n}}$ à la puiſſance r, & l'abaiſſer à la fois à la racine r.

180. *Une puiſſance fractionnaire reſtera encore la même, lorſque l'on diviſera les deux termes de ſon expoſant par la même quantité.*

C'eſt-à-dire, qu'en général $a^{\frac{mn}{nr}} = a^{\frac{m}{r}}$.

ARTICLE II.

PROBLÊME I.

181. *Une puiſſance étant négative, la réduire à un expoſant poſitif.*

SOLUTION.

On fera une fraction dont le numérateur ſera le

coefficient de la puiſſance propoſée, & dont le dénominateur ſera cette même puiſſance, mais avec un expoſant poſitif égal à l'expoſant négatif (n°. 170, 171).

Par exemple . . . . $\begin{cases} a^{-3} \text{ ou } 1a^{-3} = \frac{1}{a^3} \\ 4a^{-5} = \frac{4}{a^5} \end{cases}$

En général . . . . . $\begin{cases} a^{-m} = \frac{1}{a^m} \\ ab^{-n} = \frac{a}{b^n} \end{cases}$

PROBLÊME II.

182. *Multiplier une puiſſance donnée d'une grandeur par une autre puiſſance donnée de la même grandeur.*

SOLUTION.

Les expoſans des puiſſances données de la même grandeur, peuvent être ou tous deux poſitifs, ou tous deux négatifs, ou l'un poſitif & l'autre négatif; dans tous ces cas on formera le produit en faiſant une nouvelle puiſſance de la grandeur propoſée, dont l'expoſant ſoit la ſomme des expoſans des deux puiſſances données.

Exemples du $\begin{cases} \text{premier cas, } a^4 \times a^5 = a^{4+5} = a^9 \text{ (167)} \\ \text{en général, } a^m \times a^n = a^{m+n} \text{ (167)} \end{cases}$

Exemples du $\begin{cases} \text{ſecond cas, } a^{-4} \times a^{-5} = a^{-4-5} = a^{-9} \\ \text{en général, } a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n} \end{cases}$

Car $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, & $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (n°. 170), & par conſéquent $a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n}$ (n°. 181).

Or $\frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}$ (n°. 167) $= a^{-m-n}$ (n°170).

Donc . . . . . $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}$.

Exemples

Exemples du $\begin{cases} 3^{e} \text{ cas}, & a^{4} \times a^{-1} = a^{4-1} = a^{3} \\ \& \ldots & a^{6} \times a^{-4} = a^{6-4} = a^{2} \\ \text{en général} & a^{m} \times a^{-n} = a^{m-n} \end{cases}$

Car $a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$ (n°. 170), & par conséquent $a^{m} \times a^{-n} = a^{m} \times \frac{1}{a^{n}}$ (181).

Or $a^{m} \times \frac{1}{a^{n}} = \frac{a^{m}}{a^{n}}$ (n°. 102) $= a^{m-n}$ (n°. 168).

Donc . . . . . $a^{m} \times a^{-n} = a^{m-n}$.

Que si les exposans des puissances données sont l'un fractionnaire, & l'autre un entier, ou tous les deux fractionnaires, on déterminera encore le produit en faisant une nouvelle puissance dont l'exposant soit la somme des exposans des puissances données.

Par exemple, $\begin{cases} a^{m} \times a^{\frac{n}{r}} = a^{m+\frac{n}{r}} = a^{\frac{mr+n}{r}} \\ a^{\frac{m}{r}} \times a^{\frac{n}{p}} = a^{\frac{m}{r}+\frac{n}{p}} = a^{\frac{pm+rn}{pr}} \\ a^{\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{r}{p}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{r}{p}} = a^{\frac{pm-rn}{pn}} \\ a^{-\frac{m}{r}} \times a^{-\frac{n}{p}} = a^{-\frac{m}{r}-\frac{n}{p}} = a^{-\frac{pm-rn}{pr}} \end{cases}$

PROBLÊME III.

183. *Diviser une puissance donnée d'une grandeur par une autre puissance donnée de la même grandeur.*

SOLUTION.

Quels que soient les exposans des puissances données, on proposera cette regle générale.

On fera une nouvelle puissance de la grandeur proposée, dont l'exposant soit la différence de l'exposant du diviseur à celui du dividende, étant évident que les procédés de la division doivent être contraires à ceux de la multiplication. (n°. 168).

EXEMPLES.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n}$$

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{-m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^{\frac{n}{r}}} = a^{m-\frac{n}{r}} = a^{\frac{mr-n}{r}}$$

$$\frac{a^{\frac{m}{r}}}{a^{\frac{n}{p}}} = a^{\frac{m}{r}-\frac{n}{p}} = a^{\frac{mp-rn}{pr}}$$

$$\frac{a^{-\frac{m}{r}}}{a^{-\frac{n}{p}}} = a^{-\frac{m}{r}+\frac{n}{p}} = a^{-\frac{pm+rn}{pr}}$$

Pour prouver les quotiens dans tous ces exemples, il suffit de multiplier le diviseur par le quotient, & l'on trouvera un produit égal au dividende.

PROBLÊME IV.

184. *Elever une puissance d'une grandeur à une autre puissance dont l'exposant soit donné.*

SOLUTION.

L'exposant de la puissance donnée, & celui de la puissance demandée étant des entiers, ils pourront être ou tous les deux positifs, ou l'un positif & l'autre négatif, ou tous les deux négatifs; & dans tous ces cas on formera la puissance demandée en écrivant la grandeur proposée avec un exposant égal au produit de l'exposant de la puissance donnée, multi-

plié par l'exposant de la puissance demandée, ce qui est fondé sur la proposition (n°. 171), & l'on observera de faire positif l'exposant de la nouvelle puissance, lorsque l'exposant de la puissance donnée, & celui de la puissance demandée, seront tous les deux positifs, ou tous les deux négatifs; & de le faire négatif, lorsque ces exposans auront des signes contraires.

1°. a^2 élevée à la puissance $3 = a^{2\times 3} = a^6$.

En général a^m élevée à la puissance $n = a^{mn}$.

2°. a^2 élevée à la puissance $-3 = a^{2\times -3} = a^{-6}$.

Car $a^2 = aa$, aa, élevée à la puissance $-3 = \overline{aa}^{-3}$, & $\overline{aa}^{-3} = \frac{1}{aa^3}$ (n°. 170) $= \frac{1}{a^2}$ élevée à la puissance positive 3.

Mais pour élever à la puissance positive 3 la fraction $\frac{1}{a^2}$, il faut faire le cube de ses deux termes (n°. 118), ce qui donnera 1 pour le numérateur de la nouvelle fraction (puisque toute puissance de $1 = 1$), & $a^{2\times 3} = a^6$ pour le dénominateur : ainsi $\frac{1}{a^2}$ élevé à la puissance positive $3 = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$ (n°. 170).

Donc a^2 élevé à la puissance négative $-3 = a^{-6}$.

En général a^m élevé à la puissance négative $-n = a^{-mn}$.

3°. a^{-m} élevée à la puissance positive $n = a^{-mn}$.

Car $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (n°. 170). Or $\frac{1}{a^m}$ élevé à la puissance $n = \frac{1^n}{a^{mn}}$, en faisant la puissance n du numérateur & du dénominateur; & parce que toute puissance de $1 = 1$, on aura $\frac{1^n}{a^{mn}} = \frac{1}{a^{mn}}$, ce qui se réduit à a^{-mn} (170).

Donc a^{-m} élevée à la puiſſance poſitive $n = a^{-mn}$.

4°. a^{-m} élevée à la puiſſance négative $-n = a^{mn}$.

Car $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (n°. 170). Or $\frac{1}{a^m}$ élevé à la puiſſance négative $-n = \frac{1^{-n}}{a^{-mn}} = \frac{1}{a^{-mn}}$, parce que $1^{-n} = \frac{1}{1^n} = 1$.

D'ailleurs $\frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}$, puiſqu'en multipliant chacun de ces expoſans par la même grandeur a^{-mn}, on a d'une part a^{mn-mn} (n°. 167) $= a^0 = 1$ (n°. 170), & de l'autre $\frac{a^{-mn}}{a^{-mn}}$ (n°. 85) $= 1$.

Donc a^{-m} élevée à la puiſſance négative $-n = a^{-mn}$.

Que ſi l'on ſuppoſe l'expoſant de la puiſſance donnée, & celui de la puiſſance demandée, tous les deux fractionnaires, ou l'un fractionnaire & l'autre un entier, on formera encore la nouvelle puiſſance en écrivant la grandeur propoſée avec un expoſant égal au produit de l'expoſant de la puiſſance donnée par celui de la puiſſance demandée: on ajoutera ſeulement pour la démonſtration, qu'élever une puiſſance quelconque à une puiſſance fractionnaire $\frac{m}{n}$, c'eſt, 1°. élever la puiſſance propoſée à une puiſſance déſignée par le numérateur m, ce qui ſe fait en multipliant l'expoſant de la puiſſance donnée par le numérateur m de l'expoſant de la puiſſance demandée (n°. 172).

C'eſt, 2°. extraire la racine déſignée par le dénominateur n de l'expoſant fractionnaire $\frac{m}{n}$, ce qui ſe fait en diviſant par le dénominateur n l'expoſant de la puiſſance propoſée (n°. 174). Ainſi la puiſſan-

ce . . . . . a^r élevée à la puiſſance $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{rm}{n}}$

La puiſſance . . . $a^{\frac{r}{p}}$ élevée à la puiſſance $\frac{m}{n} = a^{\frac{rm}{pn}}$

La puiſſance $a^{-\frac{r}{p}}$ élevée à la puiſſance $-\frac{m}{n} = a^{\frac{rm}{pn}}$

PROBLÊME.

185. *Une puiſſance quelconque d'une grandeur étant donnée, en extraire la racine d'un degré quelconque.*

SOLUTION.

L'extraction des racines étant une opération contraire à l'élévation des puiſſances, il eſt évident que pour extraire la racine quelconque d'une puiſſance donnée, il faudra diviſer l'expoſant de cette puiſſance par l'expoſant de la racine demandée (n°. 172), & faire ce quotient poſitif, ſi l'expoſant de la puiſſance donnée & celui de la racine demandée, ſont de même ſigne, & le faire négatif, ſi ces expoſans ont des ſignes contraires.

Ainſi la racine n de la puiſſance $a^m = a^{\frac{m}{n}}$

La racine . . $-n$ de la puiſſance $a^m = a^{-\frac{m}{n}}$

La racine . . . n de la puiſſance $a^{-m} = a^{-\frac{m}{n}}$

La racine . . $-n$ de la puiſſance $a^{-m} = a^{\frac{m}{n}}$

La racine . . . n de la puiſſance $a^{\frac{m}{r}} = a^{\frac{m}{nr}}$

Pour prouver tous les réſultats, il ſuffira de les élever à des puiſſances d'un même expoſant que celui de la racine que l'on aura extraite.

REMARQUE.

186. *Au lieu de faire les puiſſances des multinomes,*

souvent on les couvre d'un trait au bout duquel on écrit l'exposant de la puissance à laquelle ils doivent être élevés.

Par exemple, pour exprimer le quarré, le cube, en général la puissance quelconque n du polinome $a+b+c$, on écrit $\overline{a+b+c}^{2}$, $\overline{a+b+c}^{3}$, $\overline{a+b+c}^{n}$.

Il est évident que les puissances des multinomes étant ainsi exprimées, on peut faire sur elles tout le calcul des exposans dont on vient de parler.

SECTION II.

Calcul des Radicaux.

DÉFINITIONS.

187. *Une grandeur radicale est une grandeur affectée du signe* $\surd$.

Ce signe, que l'on nomme *signe radical*, indique par le nombre que l'on écrit entre ses branches, le degré de la racine à laquelle la quantité qu'il affecte doit être abaissée.

Par exemple, l'expression $\surd^{2}(a^3+2ab)$, ou simplement $\surd(a^3+2ab)$, désigne la racine quarrée de la quantité a^3+2ab.

$\surd^{3}(a^2+y^2)$ désigne la racine cubique de la quantité a^2+y^2.

En général $\surd^{n}(y^p+z^q)$ désigne la racine indéterminée n de la quantité y^p+z^q.

On remarquera que la ligne tirée au-dessus de la

quantité, qui eſt à la droite du ſigne, ſert à marquer que le ſigne radical porte ſur toute la quantité qui eſt ſous cette ligne.

On nomme *grandeurs irrationnelles* ou *incommenſurables*, les racines que l'on ne peut déterminer exactement, & les puiſſances qui ont de telles racines ſe nomment puiſſances imparfaites.

Par exemple, 7 eſt un quarré imparfait, parce qu'il n'eſt aucun nombre qui, multiplié par lui-même, produiſe 7; & la racine quarrée de 7 eſt une grandeur incommenſurable; de même $2a^2b$ eſt un cube imparfait, parce qu'il n'eſt aucune grandeur qui, multipliée par elle-même deux fois ſucceſſivement, puiſſe produire $2a^2b$, & la racine cubique de $2a^2b$ eſt une grandeur irrationnelle.

On nomme *grandeur imaginaire* une grandeur qui implique contradiction, & dont par conſéquent l'approximation même eſt impoſſible; telle eſt la racine d'un expoſant quelconque pair d'une grandeur affectée du ſigne moins. Par exemple, $\sqrt[2]{-a^2}$ eſt une racine imaginaire, parce qu'il eſt impoſſible qu'aucune grandeur poſitive ou négative, multipliée par elle-même autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans l'expoſant pair 2, c'eſt-à-dire, une fois, produiſe $-a^2$; en effet $+a \times +a = +a^2$, & $-a \times -a = +a^2$ (n°. 75).

De même $\sqrt[4]{-y^4}$ eſt imaginaire, parce qu'aucune grandeur multipliée par elle-même ſucceſſivement autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans l'expoſant 4 de la racine, c'eſt-à-dire, trois fois, ne peut produire $-$. En effet, $+y \times +y = +y^2$, $+y^2 \times +y = +y^3$, $+y^3 \times +y = +y^4$, & $-y \times -y = +y^2$, $+y^2 \times -y = -y^3$, $-y^3 \times -y = +y^4$.

En général il eſt impoſſible qu'aucune grandeur poſitive ou négative, multipliée par elle-même autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans un expoſant pair, on produiſe une puiſſance précédée du ſigne —: ainſi une puiſſance précédée du ſigne —, n'aura aucune racine réelle d'un expoſant pair.

ARTICLE I.

Pour préparer aux opérations que l'on fera ſur les grandeurs radicales, on commencera par examiner:

1°. La maniere de délivrer du ſigne radical les grandeurs qui en ſont affectées.

2°. La maniere d'affecter du ſigne radical toute grandeur, ſans changer ſa valeur.

3°. La maniere de changer l'expoſant du ſigne radical, ſans changer la valeur de la grandeur radicale.

188. 1°. On ſe rappellera que toute puiſſance fractionnaire n'eſt qu'une racine indiquée; que le dénominateur de l'expoſant fractionnaire exprime le degré de la racine que l'on propoſe d'extraire, tandis que le numérateur exprime le degré de la puiſſance propoſée (n°. 176).

On ſe rappellera encore que pour extraire la racine quelconque d'une puiſſance compoſée de pluſieurs produiſans, il faut diviſer l'expoſant de chacun de ces produiſans par l'expoſant de la racine demandée (n°. 177).

Et l'on conclura que pour délivrer une grandeur radicale du ſigne qui l'affecte, il ſuffit de diviſer l'expoſant des produiſans de cette grandeur par l'expoſant du ſigne radical.

Par exemple . . . . $\begin{cases} \sqrt[3]{a^3b^2} = a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{2}{3}} = ab^{\frac{2}{3}} \\ \sqrt[4]{a^5by^2} = a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{4}} \end{cases}$

En général . . $\sqrt[n]{z^{mn}y^p} = z^{\frac{mn}{n}}y^{\frac{p}{n}} = z^m y^{\frac{p}{n}}$.

Si la grandeur ſous le ſigne eſt un polinôme & une puiſſance parfaite du degré déſigné par l'expoſant du ſigne, on la délivrera du ſigne radical en prenant la racine déſignée par l'expoſant du ſigne.

Par exemple, $\sqrt[2]{a+b}^2$ ou $\sqrt[2]{a^2+2ab+b^2}=a+b$.

En général, $\sqrt[n]{x+y}^n=x+y$.

On remarquera qu'une racine imaginaire n'étant telle que parce que la grandeur ſous le ſigne radical étant affectée du ſigne —, l'expoſant du ſigne eſt un nombre pair, il eſt évident qu'elle reſtera toujours imaginaire, lors même que l'expoſant du ſigne radical pourra diviſer exactement l'expoſant de la grandeur ſous le ſigne : ces ſortes de racines ne pourront donc être délivrées du ſigne par la méthode dont on vient de parler.

Si quelqu'un des facteurs de la grandeur ſous le ſigne, a un expoſant diviſible exactement par l'expoſant du ſigne radical, ce produiſant ſera évidemment une puiſſance parfaite du degré déſigné par l'expoſant du ſigne : alors on pourra, pour rendre l'expoſant plus ſimple, tirer ce produiſant hors du ſigne, en prendre la racine du degré déſigné par l'expoſant du ſigne radical, & l'écrire immédiatement à la gauche du ſigne radical, où elle ſera cenſée multipliée par la racine des autres produiſans qui reſteront ſous le ſigne, parce que la racine quelconque d'un produit, eſt le produit des racines du degré propoſé des facteurs de ce produit (n°. 177).

Par exemple . . . $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\times 2}=3\sqrt[3]{2}$

De même . . . . $\sqrt[4]{a^4b^8c}=ab^2\sqrt[4]{c}$

En général . . . $\sqrt[n]{a^m b^n}=b\sqrt[n]{a^m}$.

189. 2°. Une grandeur peut paſſer ſous un ſigne ra-

dical ſans changer de valeur, pourvu qu'on élevé cette grandeur à la puiſſance du degré marqué par l'expoſant du ſigne.

Par exemple, $a^3 b = \sqrt[2]{a^{3\times 2} b^{1\times 2}} = \sqrt[2]{a^6 b^2}$.

Car $\sqrt[2]{a^6 b^2} = a^{\frac{6}{2}} b^{\frac{2}{2}} = a^3 b$ la grandeur propoſée.

En général, $y^r z^m = \sqrt[n]{y^{rn} z^{mn}}$.

Car $\sqrt[n]{y^{rn} z^{mn}} = y^{\frac{rn}{n}} z^{\frac{mn}{n}} = y^r z^m$ la grandeur propoſée.

190. 3°. On multipliera l'expoſant du ſigne radical ſans changer la valeur de la grandeur radicale, en élevant la quantité qui eſt ſous le ſigne, au degré indiqué par la quantité qui aura multiplié l'expoſant du ſigne radical.

Par exemple, $\sqrt[2]{abx} = \sqrt[6]{a^3 b^3 x^3}$.

En général, $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[mn]{a^{rm}}$.

Car $\sqrt[n]{a^r} = a^{\frac{r}{n}}$ (n°. 188), & $\sqrt[mn]{a^{rm}} = a^{\frac{rm}{mn}}$.

Or $a^{\frac{rm}{mn}} = a^{\frac{r}{n}}$ (n°. 179), donc $\sqrt[mn]{a^{rm}} = \sqrt[n]{a^r}$.

Et ſi l'on diviſe l'expoſant du ſigne radical, & l'expoſant de la grandeur ſous le ſigne, ou les expoſans de ſes produiſans par une même quantité, la grandeur radicale ne changera pas de valeur.

Par exemple, $\sqrt[6]{a^4 b^8} = \sqrt[3]{a^2 b^4}$.

En diviſant par 2 l'expoſant du ſigne radical, & les expoſans des produiſans de la grandeur ſous le ſigne.

En général, $\sqrt[mn]{a^{rn} y^{sn}} = \sqrt[m]{a^r y^s}$.

Car $\sqrt[mn]{a^{rn} y^{sn}} = a^{\frac{rn}{mn}} y^{\frac{sn}{mn}}$ (n°. 188), & $\sqrt[m]{a^r y^s} = a^{\frac{r}{m}} y^{\frac{s}{m}}$.

Or $a^{\frac{rn}{mn}} y^{\frac{sn}{mn}} = a^{\frac{r}{m}} y^{\frac{s}{m}}$ (n°. 180). Donc $\sqrt[mn]{a^{rn} y^{sn}} = \sqrt[m]{a^r y^s}$.

ARTICLE II.

PROBLÊME I.

191. *Réduire les grandeurs radicales à leurs plus ſimples expreſſions.*

SOLUTION.

Ce problême a lieu, 1°. lorſque quelque facteur de la grandeur ſous le ſigne radical, eſt une puiſſance parfaite du degré marqué par l'expoſant du ſigne radical; alors, pour réduire la grandeur radicale à ſa plus ſimple expreſſion, on propoſera cette regle.

On tirera la racine du plus grand produiſant ſous le ſigne, qui eſt une puiſſance parfaite du degré marqué par l'expoſant du ſigne, & l'on exprimera la multiplication de la racine trouvée par les racines des autres facteurs (n°. 188), en plaçant cette racine trouvée immédiatement à la gauche du ſigne radical qui ne portera plus que ſur ces autres facteurs.

Par exemple, la grandeur radicale $\sqrt{27a^2bc} = \sqrt{9a^2 \times 3bc}$, deviendra, en réduiſant, $3a\sqrt{3bc}$.

De même la grandeur radicale $\sqrt[4]{32a^4 - 16a^5} = \sqrt[4]{16a^4 \times 2 - a}$, deviendra, en réduiſant, $2a\sqrt[4]{2-a}$.

2°. Lorſqu'une fraction eſt ſous le ſigne radical, alors on réduit en faiſant enſorte que la grandeur ſous le ſigne ſoit un entier. Ce que l'on exécutera en opérant comme il ſuit.

On multipliera le numérateur & le dénominateur de la fraction ſous le ſigne, par une puiſſance du dénominateur, qui rende le dénominateur une puiſſance parfaite du degré marqué par l'expoſant du ſigne radical; puis tirant hors du ſigne le dénominateur de la nouvelle fraction, on en écrira la racine immédiatement à la gauche du ſigne radical, en la faiſant le dénominateur d'une fraction qui aura l'unité pour numérateur.

C'eſt-à-dire, qu'en général étant donnée la grandeur radicale $\sqrt[n]{\frac{a^r x}{z}}$.

On multipliera le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{a^r x}{z}$, par la puiſſance z^{n-1} du dénominateur.

Ce qui donnera (numéro 167) $\sqrt[n]{\frac{a^r x z^{n-1}}{z^{1+n-1}}}$ $= \sqrt[n]{\frac{a^r x z^{n-1}}{z^n}}$ = la grandeur propoſée $\sqrt[n]{\frac{a^r x}{z^n}}$, parce que les deux termes de la fraction ſous le ſigne ont été multipliés par une même quantité (n°. 95).

Comme la nouvelle grandeur radicale $\sqrt[n]{\frac{a^r x z^{n-1}}{z^n}}$ $= \sqrt[n]{a^r x z^{n-1} \times \frac{1}{z^n}}$, on délivrera du ſigne la puiſſance parfaite $\frac{1}{z^n}$, du même degré n que l'expoſant du ſigne radical, & l'on aura $\frac{1}{z}\sqrt[n]{a^r x z^{n-1}}$ $= \sqrt[n]{a^r x z^{n-1} \times \frac{1}{z^n}} = \sqrt[n]{\frac{a^r x}{z}}$.

Pour faciliter cette réduction, on donnera les exemples ſuivans.

Exemples.

$$\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^2bc}{c^3}} = \sqrt[3]{a^2bc \times \frac{1}{c^3}} = \frac{1}{c}\sqrt[3]{a^2bc}.$$

$$\sqrt[4]{\frac{2}{5}} = \sqrt[4]{\frac{2\times5\times5\times5}{5\times5\times5\times5}} = \sqrt[4]{250 \times \frac{1}{5\times5\times5\times5}} = \frac{1}{5}\sqrt[4]{250}.$$

3°. Lorſque les expoſans des produiſans de la grandeur ſous le ſigne radical, & l'expoſant de ce ſigne, auront un facteur commun, on pourra encore réduire la grandeur radicale à une expreſſion plus ſimple : ce qui s'exécutera en diviſant l'expoſant du ſigne radical, & l'expoſant de chaque produiſant de la grandeur ſous le ſigne, par leur facteur commun (n°. 190).

Par exemple, $\sqrt[6]{a^9b^3} = \sqrt[3\times2]{a^{3\times3}b^{1\times3}}$, ſe réduira à $\sqrt[2]{a^3b}$, en diviſant tous les expoſans par le produiſant commun 3.

En général $\sqrt[mn]{a^{rn}c^{pn}} = \sqrt[m\times n]{a^{r\times n}c^{p\times n}}$, ſe réduira à $\sqrt[m]{a^rc^p}$.

REMARQUE.

192. *Pour réduire une grandeur radicale à la plus ſimple expreſſion poſſible, il faut que le produiſant par lequel on la diviſe ſoit la plus grande puiſſance parfaite du degré marqué par le ſigne, qui puiſſe diviſer exactement la quantité ſous le ſigne : pour trouver cette plus grande puiſſance qui diviſe exactement, on cherchera par la méthode qui ſuit tous les diviſeurs exacts de la grandeur ſous le ſigne, & on choiſira enſuite entre ces diviſeurs la plus grande puiſſance parfaite du degré du ſigne ; puis on opérera comme il eſt preſcrit dans le premier cas du problême.*

193. *Méthode pour trouver tous les diviſeurs exacts d'une quantité donnée.*

1°. Si la quantité propoſée eſt un nombre, on diviſera d'abord ce nombre par 2, s'il eſt poſſible, & ſucceſſivement par 2, autant de fois qu'il ſera poſſible.

On eſſayera de diviſer enſuite le dernier quotient par 3, & l'on fera la diviſion ſucceſſive par 3 autant de fois qu'il ſera poſſible.

On fera de même les diviſions par 5, par 7, par 11, &c. juſqu'à ce que le dernier quotient ſoit l'unité.

Ayant écrit dans une colonne, de haut en bas, tous les diviſeurs dont on ſe ſera ſervi, on multipliera le premier diviſeur par le ſecond, & on écrira le produit à la droite du ſecond.

On multipliera enſuite par le troiſieme diviſeur les deux premiers diviſeurs, & le produit que l'on en a formé, & l'on en écrira les produits à la droite du troiſieme diviſeur.

On multipliera de même, par le quatrieme diviſeur, tout ce qui ſe trouvera au-deſſus de lui, & l'on écrira les produits à la droite du quatrieme diviſeur.

Et ainſi de ſuite. Les diviſeurs ſimples que l'on aura trouvés, & les produits que l'on aura formés, ſeront tous les diviſeurs du nombre propoſé.

Soit, par exemple, propoſé de trouver tous les diviſeurs du nombre 300.

300	2							
150	2	4						
75	3	6	12					
25	5	10	15	20	30	60		
5	5	25	50	75	100	150	300	
1								

On diviſera 300 par 2, & l'on écrira le quotient

150 au-deſſous de 300, & le diviſeur 2 à la droite de 300.

On diviſera 150 par 2, & l'on écrira le quotient 75 au-deſſous du premier 150, & le ſecond diviſeur 2 au-deſſous du premier.

Comme le quotient 75 ne peut plus ſe diviſer par 2, on eſſayera de le diviſer par 3; ce qui réuſſit, & l'on écrira le quotient 25 au-deſſous de 75, & le diviſeur 3 au-deſſous du ſecond diviſeur 2.

Comme le quotient 25 ne peut plus ſe diviſer par 3, on le diviſera par 5, & l'on écrira le quotient 5 ſous 25, & le dernier diviſeur 5 ſous le diviſeur 3.

On diviſera enfin 5 par 5, & l'on écrira le quotient 1 ſous le quotient 5, & le nouveau diviſeur 5 ſous le précédent 5.

Cela fait, on multipliera le premier diviſeur 2 par le ſecond diviſeur 2; ce qui produira 4, que l'on écrira à la droite du ſecond diviſeur 2.

On multipliera tout ce qui eſt au-deſſous du diviſeur 3 par le diviſeur 3; ce qui produira 6, 12, que l'on écrira à la droite du diviſeur 3.

On multipliera par le diviſeur ſuivant 5, tout ce qui eſt au-deſſus de ce diviſeur; ce qui produira 10 . 15 . 20 . 30 . 60 que l'on écrira à la droite du diviſeur 5.

Enfin on multipliera tout ce qui eſt au-deſſus du dernier diviſeur 5 par le même diviſeur; ce qui donnera les nouveaux produits 25 . 50 . 75 . 100 . 150 . 300, que l'on écrira à la droite de ce dernier diviſeur.

Et le nombre 300 ayant pour diviſeurs ſimples les nombres 2 . 2 . 3 . 5 . 5, aura auſſi pour diviſeurs les nombres 4 . 6 . 10 . 12 . 15 . 20 . 25 . 30 . 50 . 60 . 75 . 100 . 150 . 300.

Car le nombre 300 étant évidemment égal au pro-

duit $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$ de ſes diviſeurs ſimples, il eſt clair que dans ce nombre ſont auſſi renfermés tous les produits 4 . 6 . 10 . 12 . 15 . 20 . 25 . 30 . 50 . 60 . 75 . 100 . 150 . 300, que l'on peut faire avec ces diviſeurs ſimples.

2°. Si la quantité propoſée eſt algébrique, on obſervera la même regle pour trouver tous ſes diviſeurs.

Si l'on propoſe, par exemple, de trouver tous les diviſeurs de $a^3c + a^2c^2$.

$$\begin{array}{l|l} a^3c + a^2c^2 & a \\ a^2c + ac^2 & a \;.\; a^2 \\ ac + c^2 & c \;.\; ac \;.\; a^2c \\ a + c & a+c \;.\; a^2+ac \;.\; a^3+a^2c \;.\; ac+c^2 \;. \\ & \quad a^2c+ac^2 \;.\; a^3c+a^2c^2. \\ 1 & \end{array}$$

On diviſera $a^3 + a^2c^2$ par a, & l'on écrira le quotient $a^2c + ac^2$ ſous la propoſée, & le diviſeur a à la droite de la grandeur propoſée.

On diviſera le premier quotient $a^2c + ac^2$, encore par a, & l'on écrira le quotient $ac + c^2$ ſous le premier quotient, & le ſecond diviſeur a ſous le premier.

On diviſera le troiſieme quotient $ac + c^2$ par c, & l'on écrira le quotient $a + c$ ſous le précédent, & le diviſeur c ſous le diviſeur précédent.

Enfin on diviſera le dernier quotient $a + c$ par $a + c$, & l'on écrira le quotient 1 au deſſous du quotient $a + c$, & le diviſeur $a + c$ ſous le diviſeur c.

On achevera l'opération, comme l'on a fait, ſur les nombres dans l'exemple précédent, & l'on trouvera que tous les diviſeurs de la quantité $a^3c + a^2c^2$ ſont : $a \;.\; c \;.\; a^2 \;.\; ac \;.\; a^2c \;.\; a+c \;.\; a^2+ac \;.\; a^3+a^2c \;.\; ac+c^2 \;.\; a^2c+ac^2 \;.\; a^3c+a^2c^2$.

PROBLÊME

PROBLÊME II.

194. *Réduire deux ſignes radicaux au même expoſant ſans changer la valeur des grandeurs radicales.*

SOLUTION.

1°. On propoſera cette méthode générale. On multipliera l'expoſant du premier ſigne radical, & l'expoſant de chaque facteur de la grandeur ſous le ſigne, par l'expoſant du ſecond ſigne radical.

Enſuite on multipliera l'expoſant du ſecond ſigne radical, & l'expoſant de chaque facteur de la grandeur ſous le ſigne, par l'expoſant du premier ſigne radical.

C'eſt-à-dire, que l'on prendra pour l'expoſant commun des ſignes radicaux le produit de leurs expoſans, & on élevera la grandeur ſous chaque ſigne à la puiſſance marquée par l'expoſant du ſigne radical de l'autre.

Par cette opération les ſignes radicaux auront évidemment un même expoſant, & de plus les grandeurs radicales n'auront pas changé de valeur, puiſque les expoſans des facteurs de chaque grandeur radicale, & l'expoſant de ſon ſigne auront été multipliés par une même quantité (n°. 190).

Ainſi, en général étant données les grandeurs radicales $\sqrt[m]{y^r x}$, $\sqrt[q]{z^n}$, on fera les grandeurs radicales $\sqrt[mq]{y^{rq} x^q}$, $\sqrt[mq]{z^{mn}}$ de même ſigne entr'elles, & de même valeur que les propoſées, en multipliant d'abord par l'expoſant q du ſecond ſigne radical $\sqrt[q]{\ }$ l'expoſant m du premier ſigne, & les expoſans des facteurs de la grandeur $y^r x$ ſous ce ſigne; en multipliant enſuite par l'expoſant m du premier ſigne ra-

dical $\sqrt[m]{\ }$ l'expoſant q du ſecond ſigne, & l'expoſant de la grandeur z^n ſous le ſigne.

2°. Lorſque les expoſans des ſignes des deux grandeurs radicales pourront être diviſés par un diviſeur commun comme dans les grandeurs radicales $\sqrt[mn]{y^p}$, $\sqrt[sn]{z^q}$, on diviſera les expoſans des ſignes par leur commun diviſeur n; ce qui donnera m pour le quotient de la diviſion de l'expoſant du premier ſigne radical $\sqrt[mn]{\ }$, & s pour le quotient de la diviſion de l'expoſant du ſecond ſigne $\sqrt[sn]{\ }$.

Enſuite on multipliera l'expoſant mn du premier ſigne par le quotient s de l'expoſant du ſecond ſigne, & on élevera la grandeur y^p ſous le premier ſigne à la puiſſance déſignée par le même quotient s.

On multipliera de même l'expoſant sn du ſecond ſigne $\sqrt[sn]{\ }$ par le quotient m de la diviſion de l'expoſant du premier ſigne, & l'on élevera la grandeur z^q ſous le ſecond ſigne à la puiſſance déſignée par le même quotient m; & l'on aura les grandeurs radicales $\sqrt[msn]{y^{ps}}$, $\sqrt[msn]{z^{qm}}$, d'abord de même valeur que les propoſées, parce que chaque grandeur ſous le ſigne eſt élevée à la puiſſance déſignée par le multiplicateur de l'expoſant de ſon ſigne (n°. 190); de plus les expoſans msn, msn de leurs ſignes ſont égaux, puiſque ces expoſans ſont encore les produits $mnsn$, $mnsn$ des expoſans mn, sn des ſignes propoſés multipliés réciproquement l'un par l'autre, & diviſés par le produiſant n commun à ces expoſans mn, sn. Ce qui ne change point l'égalité de ces produits, puiſque des produits égaux diviſés par des grandeurs égales donnent des quotiens égaux.

Selon cette méthode les grandeurs radicales $\sqrt[4]{a^2b}$, $\sqrt[6]{a^3x}$, deviendront $\sqrt[12]{a^6b^3}$, $\sqrt[12]{a^6x^2}$.

REMARQUE.

195. *Après avoir réduit deux grandeurs radicales à des ſignes de même expoſant* (199), *& chacune à ſa plus ſimple expreſſion* (191), *en conſervant toujours le même expoſant aux ſignes radicaux, ſi la quantité ſous le ſigne eſt exactement la même dans les deux, les deux grandeurs radicales ſeront entr'elles comme les quantités qui ſont hors du ſigne; c'eſt-à-dire, que la premiere de ces deux grandeurs ſera contenue dans la ſeconde, ou contiendra la ſeconde autant de fois que la partie hors du ſigne dans la premiere ſera contenue dans la partie hors du ſigne dans la ſeconde, ou la contiendra. C'eſt-à-dire, qu'en général* $\frac{y\sqrt[m]{a^n}}{z\sqrt[m]{a^n}} = \frac{y}{z}$.

Car en multipliant les deux termes de la diviſion $\frac{y}{z}$ par la même quantité $\sqrt[m]{a^n}$, il viendra la fraction $\frac{y\sqrt[m]{a^n}}{z\sqrt[m]{a^n}} = \frac{y}{z}$ (n°. 95).

Ainſi, quoique l'on ne puiſſe pas déterminer exactement les valeurs des quantités $y\sqrt[m]{a^n}$, $z\sqrt[m]{a^n}$, on peut cependant déterminer ce qu'elles ſont entr'elles; par exemple, ſi $y = 9$, & $z = 3$, on dira que $y\sqrt[m]{a^n}$ eſt triple de $z\sqrt[m]{a^n}$.

Ces ſortes de racines, *incommenſurables en elles-mêmes*, c'eſt-à-dire, que l'on ne peut exprimer par aucun nombre, mais dont on découvre ce qu'elles

ſont entr'elles, ſont dites *commenſurables entr'elles*, ou *communicantes*.

PROBLÊME III.

196. *Exprimer la ſomme de deux ou de pluſieurs grandeurs radicales propoſées.*

SOLUTION.

On réduira d'abord les grandeurs radicales à des ſignes de même expoſant (n°. 192) : l'on tirera hors du ſigne les racines que l'on en pourra délivrer (191) ; alors ſi ces grandeurs ainſi réduites ſont commenſurables entr'elles (195), on exprimera leur ſomme en faiſant une nouvelle grandeur radicale d'un ſigne de même expoſant que les réduites, dont la partie ſous le ſigne ſoit la partie commune ſous le ſigne dans les réduites, & dont la partie délivrée du ſigne ſoit la ſomme des parties délivrées du ſigne dans les réduites ; & lorſque cette ſomme de parties délivrées du ſigne aura pluſieurs termes, on la couvrira d'un trait pour marquer qu'elle doit être multipliée toute entiere par la partie qui ſera ſous le ſigne.

Par exemple, ſi l'on propoſe d'ajouter enſemble les grandeurs radicales $3f\sqrt[3]{b+2ax-z}$, $2a\sqrt[3]{b+2ax-z}$, $b\sqrt[3]{b+2ax-z}$, on écrira pour la ſomme $3f+2a+b\sqrt[3]{b+2ax-z}$; ce qui repréſente chacun des termes $3f$, $+2a$, $+b$ multiplié par la partie commune radicale $\sqrt[3]{b+2ax-z}$, comme il eſt dans la grandeur radicale correſpondante propoſée.

De même ſi on propoſe d'ajouter enſemble les grandeurs radicales $3f\sqrt[4]{b+2ax}$, $2f\sqrt[4]{b+2ax}$,

on écrira pour la ſomme $3f + 2f\sqrt[4]{b+2ax} = 5f\sqrt[4]{b+2ax}$.

Si les grandeurs radicales réduites ne ſont pas commenſurables, on exprimera leur ſomme en les écrivant de ſuite avec les ſignes + ou — qui les précedent.

Par exemple, pour exprimer la ſomme des grandeurs radicales $3f\sqrt[3]{2ax}$, $-2b\sqrt[3]{2x}$, on écrira de ſuite $3f\sqrt[3]{2ax} - 2b\sqrt[3]{2x}$.

PROBLÊME IV.

197. *Exprimer la différence de deux grandeurs radicales propoſées.*

SOLUTION.

On réduira d'abord les grandeurs radicales propoſées à des ſignes de même expoſant (n°. 194), & l'on tirera hors du ſigne les racines que l'on en pourra délivrer (n°. 191); alors ſi les grandeurs radicales ainſi réduites ſont commenſurables entr'elles (195), on déterminera leur différence en faiſant une nouvelle grandeur radicale d'un ſigne de même expoſant que les réduites, dont la partie ſous le ſigne ſoit la partie commune ſous le ſigne dans les réduites, & dont la partie délivrée du ſigne ſoit la différence des parties délivrées du ſigne dans les réduites; & lorſque cette différence des parties délivrées du ſigne ſera compoſée de pluſieurs termes, on la couvrira d'un trait pour marque que tous ſes termes doivent être multipliés par la partie ſous le ſigne.

Pour retrancher de la grandeur radicale $y\sqrt[m]{z^p}$

La grandeur radicale . . . . . $x\sqrt[m]{z^p}$

On écrira . . . . . $\overline{y-x}\sqrt[m]{z^p}$.

Ce qui repréſentant le produit de la partie y délivrée du ſigne, multipliée par la partie commune ſous le ſigne $\sqrt[m]{z^p}$, moins le produit de la partie x délivrée du ſigne, multipliée par la partie commune ſous le ſigne, eſt évidemment la différence des deux grandeurs radicales propoſées.

Si les grandeurs radicales réduites ne ſont pas commenſurables entr'elles, on exprimera leur différence en écrivant avec un ſigne contraire la grandeur radicale à ſouſtraire à la ſuite de l'autre.

Par exemple, pour retrancher de la grandeur radicale . . . . . $b\sqrt[m]{a^r x}$

la grandeur radicale . . . . . $c\sqrt[m]{a^r z}$

on écrira . . . . . $b\sqrt[m]{a^r x} - c\sqrt[m]{a^r z}$.

PROBLÊME V.

198. *Multiplier les grandeurs radicales.*

SOLUTION.

1°. Lorſqu'il s'agira de multiplier une grandeur toute entiere ſous un ſigne radical par une grandeur rationnelle, c'eſt-à-dire, non radicale, on ſe contentera d'écrire immédiatement à la gauche du ſigne de la grandeur radicale, la grandeur rationnelle avec une barre au-deſſus, lorſqu'elle aura pluſieurs termes.

Par exemple, pour exprimer la multiplication de . . . $\sqrt[3]{a^2 + bx}$ par $2a + b$

on écrira . . . . . $\overline{2a+b}\sqrt[3]{a^2+bx}$.

Ce qui ſignifie que la grandeur $2a + b$ doit être multipliée par $\sqrt[3]{a^2 + bx}$.

2°. Lorſqu'il s'agira de multiplier l'une par l'autre des grandeurs radicales toutes entieres ſous des ſignes de même expoſant, on multipliera l'une par l'autre les grandeurs ſous le ſigne, & l'on affectera le produit du ſigne radical commun aux deux produiſans.

Parce que la racine d'un degré quelconque propoſé d'un produit, eſt égale au produit des racines du même degré propoſé des facteurs de ce produit (n°. 177).

Par exemple, $\sqrt[m]{y^p} \times \sqrt[m]{z^q} = \sqrt[m]{y^p z^q}$, qu'on éleve en effet à la puiſſance m ces deux membres d'égalité, on trouvera de part & d'autre $y^p z^q$.

3°. Lorſqu'il s'agira de multiplier l'une par l'autre des grandeurs radicales dont les ſignes ont encore même expoſant, mais qui ſont compoſées de deux parties l'une ſous le ſigne, l'autre hors du ſigne, on déterminera le produit en faiſant une nouvelle grandeur radicale d'un ſigne de même expoſant que celui des produiſans, dont la partie hors du ſigne ſoit le produit de la multiplication des parties délivrées du ſigne dans les produiſans, & dont la partie ſous le ſigne ſoit le produit des quantités ſous le ſigne dans les produiſans; & lorſque cette nouvelle grandeur radicale pourra ſe réduire, on la réduira :

Par exemple, $4a\sqrt[3]{a^2+2ax+x^2} \times 2c\sqrt[3]{a+x} = 8ac\sqrt[3]{a^3+3a^2x+3ax^2+x^3} = 8ac \times a+x = 8a^2c+8acx$.

En général $y\sqrt[p]{x} \times a\sqrt[p]{z^m} = ay\sqrt[p]{xz^m}$.

4°. Lorſque l'on propoſera de multiplier l'un par l'autre deux polinomes compoſés de grandeurs rationnelles & de grandeurs radicales délivrées ou non en parties du ſigne radical, en ſuppoſant toujours que les

ſignes radicaux ont le même expoſant, on multipliera ſucceſſivement chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, en obſervant ce que l'on a dit touchant les cas précédens.

Par exemple, ſi l'on propoſe de multiplier la grandeur . . . . . $a+\sqrt{x^2-y^2}$

par . . . . . $a+\sqrt{x^2-y^2}$

on aura, en multipliant par le terme a, $a^2+a\sqrt{x^2-y^2}$,

& en multipliant par $\sqrt{x^2-y^2}$, $a\sqrt{x^2-y^2}+x^2-y^2$,

& le produit total ſera $a^2+2a\sqrt{x^2-y^2}+x^2-y^2$.

Lorſque l'on propoſera la multiplication des grandeurs radicales, dont les ſignes auront des expoſans différens, on commencera par réduire ces grandeurs à des ſignes de même expoſant, puis on opérera comme il a été expliqué.

PROBLÊME VI.

199. *Diviſer les grandeurs radicales.*

SOLUTION.

1°. Lorſqu'il s'agira de diviſer une grandeur radicale par une grandeur rationnelle, on ſe contentera de mettre la rationnelle ſous la grandeur radicale avec une barre aſſez longue pour faire connoître que le ſigne radical ne porte pas ſur le diviſeur.

Par exemple, pour diviſer $\sqrt[3]{a^2+2ax+x^2}$ par ab, on écrira . . . . . $\frac{\sqrt[3]{a^2+2ax+x^2}}{ab}$

Et ſi l'on veut que le ſigne radical porte ſur le diviſeur, on élevera le diviſeur à la puiſſance déſignée par l'expoſant du ſigne radical du dividende.

Par exemple, pour diviſer $\sqrt[3]{a^2 + 2a^2x}$ par ab, on écrira . . . . . $\sqrt[3]{\frac{a^2 + 2a^2x}{a^3b^3}}$

2°. Lorſqu'il s'agira de diviſer l'une par l'autre deux grandeurs radicales toutes entieres ſous des ſignes de même expoſant, on diviſera les quantités qui ſont ſous le ſigne radical du dividende par les quantités qui ſont ſous le ſigne radical du diviſeur, & l'on affectera le quotient du ſigne radical commun au dividende & au diviſeur.

Par exemple, pour diviſer . . . . $\sqrt[3]{ab}$ par $\sqrt[3]{b}$, on écrira . . . . . $\sqrt[3]{\frac{ab}{b}} = \sqrt[3]{a}$.

3°. Lorſqu'il s'agira de diviſer l'une par l'autre deux grandeurs radicales dont les ſignes ont encore même expoſant, mais qui ſont compoſées de deux parties l'une ſous le ſigne, & l'autre hors du ſigne, on déterminera le quotient en faiſant une nouvelle grandeur radicale d'un ſigne de même expoſant que les propoſées, dont la partie hors du ſigne ſoit le quotient de la diviſion de la quantité hors du ſigne dans le dividende par la quantité hors du ſigne dans le diviſeur, & dont la partie ſous le ſigne ſoit le quotient de la diviſion de la quantité ſous le ſigne dans le dividende par la quantité ſous le ſigne dans le diviſeur.

Par exemple, pour diviſer $8bd\sqrt[4]{9ac}$ par $4d\sqrt[4]{3c}$, on écrira . . . . . $\frac{8bd}{4d}\sqrt[4]{\frac{9ac}{3c}} = 2d\sqrt[4]{3a}$.

4°. Si l'on propoſe de diviſer l'un par l'autre deux polinomes compoſés de grandeurs rationnelles & de grandeurs radicales délivrées ou non en parties du

ſigne radical que l'on ſuppoſe toujours de même expoſant dans toutes, on tentera cette diviſion ſelon la méthode que l'on a donné pour diviſer l'une par l'autre deux quantités algébriques complexes (n°. 84), en obſervant ce que l'on a dit dans le cas précédent; que ſi la diviſion ne peut ſe faire, on ſe contentera de l'indiquer en écrivant le polinome diviſeur ſous le polinome dividende.

REMARQUE.

1°. *Dans la diviſion des grandeurs radicales on prouvera le quotient en le multipliant par le diviſeur pour retrouver le dividende.*

2°. *Lorſque l'on propoſera la diviſion des grandeurs radicales, dont les ſignes auront des expoſans différens, on commencera par réduire les grandeurs à des ſignes de même expoſant, puis on opérera comme il a été expliqué.*

PROBLÊME VII.

200. *Elever une grandeur radicale à une puiſſance d'un expoſant donné quelconque.*

SOLUTION.

1°. Si la grandeur radicale eſt toute entiere ſous le ſigne, on conſervera le ſigne radical avec le même expoſant, & on élevera la grandeur ſous le ſigne à la puiſſance du degré propoſé; c'eſt-à-dire, qu'en général la grandeur radicale $\sqrt[m]{a^p}$ élevée à la puiſſance $n = \sqrt[m]{a^{pn}}$.

Car $\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}}$ (n°. 188), & $\sqrt[m]{a^{pn}} = a^{\frac{pn}{m}}$.

Or $a^{\frac{p}{m}}$ élevée à la puiſſance $n = a^{\frac{pn}{m}}$ (n°. 172).

Donc $\sqrt[m]{a^p}$ élevée à la puiſſance $n = \sqrt[m]{a^{pn}}$.

2°. Lorſque la grandeur radicale propoſée ſera compoſée de deux parties, l'une ſous le ſigne, l'autre hors du ſigne, on élevera à la puiſſance demandée & la quantité qui précédera le ſigne, & celle qui le ſuivra.

En général $a\sqrt[m]{y^p}$ élevée à la puiſſance $n = a^n\sqrt[m]{y^{pn}}$

Car $a\sqrt[m]{y^p} = ay^{\frac{p}{m}}$, & $a^n\sqrt[m]{y^{pn}} = a^n y^{\frac{pn}{m}}$ (n°. 188).

Or $ay^{\frac{p}{m}}$ élevée à la puiſſance $n = a^n y^{\frac{pn}{m}}$ (n°. 173).

Donc $a\sqrt[m]{y^p}$ élevée à la puiſſance $n = a^n\sqrt[m]{y^{pn}}$

PROBLÊME VIII.

201. *Extraire la racine quelconque d'une grandeur radicale propoſée.*

SOLUTION.

1°. Si la grandeur radicale eſt toute entiere ſous le ſigne, on conſervera la même grandeur ſous le ſigne, & l'on donnera à ce ſigne un expoſant égal au produit de ſon expoſant multiplié par celui de la racine demandée.

C'eſt-à-dire, qu'en général la racine n de $\sqrt[m]{y^p}$ eſt $\sqrt[mn]{y^p}$.

Car ſi on éleve à la puiſſance n la grandeur radicale $\sqrt[mn]{y^p}$, il viendra (n°. 200) $\sqrt[mn]{y^{pn}}$; ce qui ſe réduit à la grandeur propoſée $\sqrt[m]{y^p}$ (n°. 191).

Lorſque la grandeur radicale propoſée ſera compoſée de deux parties l'une ſous le ſigne, l'autre hors du ſigne, on fera paſſer ſous le ſigne la partie délivrée du ſigne (n°. 189); & alors on aura à extraire la racine d'une grandeur radicale toute entiere ſous le ſigne.

SECTION III.

Élévation des grandeurs aux puiſſances quelconques.

202. On a vu dans la Section premiere de ce Chapitre, la maniere d'élever un monome à une puiſſance quelconque; à l'égard des grandeurs algébriques complexes, on ſait encore (n°. 117) que pour les élever à une puiſſance d'un degré donné, il faut les multiplier par elles-mêmes ſucceſſivement autant de fois moins une, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de cette puiſſance. Cette maniere de former les puiſſances nous abandonne lorſque l'expoſant de la puiſſance eſt une fraction; c'eſt pourquoi on s'eſt appliqué à trouver une expreſſion générale pour la puiſſance quelconque m entiere ou fractionnaire d'une quantité algébrique complexe quelconque, déſignée, par exemple par $p+q$, afin qu'à l'aide d'une pareille expreſſion on puiſſe commodément élever toute ſorte de grandeurs à toute ſorte de puiſſances, dont l'expoſant donné ſera ou un nombre entier, ou un nombre fractionnaire.

ARTICLE I.

Où l'on donne l'expreſſion générale de la puiſſance m *de* $\overline{p\pm q}$; *c'eſt-à-dire, la valeur de* $\overline{p\pm q}^{m}$.

203. En ſuppoſant d'abord que m eſt un entier, un moyen aiſé d'arriver à cette expreſſion générale, c'eſt de faire les différentes puiſſances de $p+q$, & d'examiner la loi ſelon laquelle ſont compoſés tous les termes de ces puiſſances.

Or faiſant ſucceſſivement la ſeconde, la troiſieme, la quatrieme, &c. puiſſances de $p+q$, ce que l'on exécute en multipliant $p+q$ par lui-même une fois pour la ſeconde puiſſance, deux fois ſucceſſivement pour la troiſieme, trois fois pour la quatrieme, en général autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans l'expoſant de cette puiſſance (n°. 117); on trouve que ces différentes puiſſances ſont :

La 1re p^1+q^1.

La 2e $p^2+2pq+q^2$.

La 3e $p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$.

La 4e $p^4+4p^3q+6p^2q^2+4pq^3+q^4$.

La 5e $p^5+5p^4q+10p^3q^2+10p^2q^3+5pq^4+q^5$.

La 6e $p^6+6p^5q+15p^4q^2+20p^3q^3+15p^2q^4+6pq^5+q^6$.

La 7e $p^7+7p^6q+21p^5q^2+35p^4q^3+35p^3q^4+21p^2q^5+7pq^6+q^7$.

&c. &c. &c. &c.

204. En conſidérant dans ces différentes puiſſances la loi des termes qui les compoſent, on voit clairement que dans chacune de ces puiſſances le premier terme eſt la premiere partie p du binome $p+q$, élevée au degré de la puiſſance, & ſon dernier terme eſt la ſeconde partie q de ce même binome, élevée auſſi au degré de la puiſſance.

Le ſecond terme eſt la premiere partie p du binome élevée au degré de la puiſſance, diminué de l'unité, & multiplié par la premiere puiſſance de la ſeconde partie q du binome; & ſon coefficient eſt l'expoſant de la puiſſance à laquelle la partie p du binome eſt élevée dans le premier terme, diviſé par l'expoſant 1 de la premiere puiſſance à laquelle la ſeconde partie q eſt élevée dans le ſecond terme.

Le troiſieme terme eſt la premiere partie p du binome élevée au degré de la puiſſance, diminué de deux unités, & multiplié par la ſeconde partie q élevée à la ſeconde puiſſance, & ſon coefficient eſt le produit des expoſans des puiſſances de la partie p dans le premier & le ſecond termes diviſés par le produit des expoſans 1 & 2 des puiſſances auxquelles la partie q eſt élevée dans le ſecond & troiſieme termes.

Ainſi de ſuite. Enſorte qu'en général chaque terme compris entre le premier & le dernier, renferme la premiere partie p du binome, élevée au degré de la puiſſance, diminué d'autant d'unités qu'il y a de termes qui le précedent, & multiplié par la ſeconde partie q élevée à une puiſſance marquée par le nombre des termes précédens.

Et ſon coefficient eſt le produit des expoſans des puiſſances deſcendantes auxquelles la partie p eſt élevée dans tous les termes précédens, diviſé par le produit des expoſans 1, 2, 3, &c. des puiſſances aſcendantes auxquelles la partie q a été élevée juſqu'à ce terme incluſivement.

205. Formant, ſelon cette loi, la puiſſance m de $p+q$, ſes différens termes ſeront :

Le 1er p^m.

Le 2e $\frac{m}{1} p^{m-1} q^1$.

Le 3e $\frac{m \times m-1}{1 \times 2} p^{m-2} q^2$.

Le 4e $\frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} p^{m-3} q^3$.

Le 5e $\frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} p^{m-4} q^4$.

&c. &c. &c.

Le dernier . . . . . q^m.

Enſorte que la valeur générale de $\overline{p+q}^{m}$ ſera

$$p^m + \frac{m}{1} p^{m-1} q^1 + \frac{m \times m-1}{1 \times 2} p^{m-2} q^2 + \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} p^{m-3} q^3 + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} p^{m-4} q^4, \text{ \&c. \&c. } + q^m.$$

REMARQUES.

I.

206. Si on vouloit former la puiſſance m de $p-q$, c'eſt-à-dire, trouver l'expreſſion générale de $\overline{p-q}^{m}$.

Il eſt évident qu'il ſuffiroit de faire négatifs tous les degrés impairs de q dans la formule précédente, ce qui donnera pour la valeur de $\overline{p-q}^{m}$,

$$p^m - \frac{m}{1} p^{m-1} q^1 + \frac{m \times m-1}{1 \times 2} p^{m-2} q^2 - \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} p^{m-3} q^3 + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} p^{m-4} q^4 - \text{ \&c. \&c. } \pm q^m.$$

II.

207. Quoiqu'on ne ſoit arrivé à l'expreſſion générale de $\overline{p \pm q}^{m}$, qu'en ſuppoſant l'expoſant m un nombre entier, cependant ſi on conſidere qu'élever une grandeur à une puiſſance dont l'expoſant eſt une fraction, n'eſt autre choſe qu'extraire de cette grandeur la racine indiquée par le dénominateur (n°. 185); & qu'en prenant ſelon les regles ordinaires (n°. 121, 142), les racines quarrées & cubiques, ou toute autre racine de $p+q$, on trouveroit dans les produits

ou dans les termes qui compoſent ces racines ou puiſſances fractionnaires, la même loi que l'on vient de trouver en élevant $p+q$ à des puiſſances dont l'expoſant eſt un nombre entier, on conclura que les formules précédentes pour la valeur de $\overline{p \pm q}^{m}$, en ſuppoſant m un nombre entier, ſont auſſi la valeur de $\overline{p \pm q}^{m}$, en ſuppoſant que l'expoſant m eſt une fraction.

III.

208. Quoique l'on ait les mêmes formules pour l'expreſſion de $\overline{p \pm q}^{m}$, ſoit que l'on ſuppoſe m un nombre entier ou une fraction, il y a cette différence à obſerver, que ſi l'expoſant m de la puiſſance eſt un nombre entier, la puiſſance finira à un terme de la formule dont le rang ſera marqué par $m+1$; c'eſt-à-dire, qu'elle ne comprendra que les premiers termes de la formule dont le nombre ſera égal à l'expoſant de la puiſſance augmentée de l'unité.

Par exemple, ſi dans $\overline{p \pm q}^{m}$ on ſuppoſe l'expoſant $m=3$, ce qui eſt l'expoſant du cube, cette puiſſance ou le cube de $p \pm q$ ne comprendra que les quatre premiers termes de la formule.

A ſavoir, $p^m \pm \frac{m}{1} p^{m-1} q^1 + \frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2} p^{m-2} q^2 \pm \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3} p^{m-3} q^3$.

Car en ſubſtituant dans le quatrieme terme 3 à la place de m, il vient :

$\frac{3 \times \overline{3-1} \times \overline{3-2}}{1 \times 2 \times 3} p^{3-3} q^3 = \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3} p^0 q^3 = q^3$; ce qui eſt le quatrieme terme du cube de $p \pm q$ (n°. 203).

A l'égard des autres termes, les coefficiens ayant tous pour un de leurs produiſans $m-3$, qui eſt zero, en ſuppoſant $m=3$, ils doivent être tous nuls.

On fera de même voir que ſi dans $\overline{p+q}^{m}$ l'expoſant $m=5$, ce qui eſt l'expoſant de la cinquieme puiſſance, cette cinquieme puiſſance ne comprendra que les ſix premiers termes de la formule.

Et ainſi de ſuite des autres puiſſances dont l'expoſant ſera un nombre entier.

209. Au lieu que ſi l'expoſant m eſt une fraction, la puiſſance fractionnaire $\overline{p+q}^{m}$ contiendra tous les termes de la formule pouſſée à l'infini, parce qu'en retranchant de l'expoſant fractionnaire m continuellement l'unité, comme on l'a fait pour former les puiſſances deſcendantes de p (n°. 206), jamais on ne parviendra à zero, le coefficient d'aucun terme ne ſera donc jamais réduit à zero, & par conſéquent la ſuite des termes de la formule ſera pouſſée à l'infini.

IV.

En diſtinguant, ainſi que l'on vient de le faire, l'expoſant entier & l'expoſant fractionnaire, on pourra renfermer dans les deux propoſitions ſuivantes la formule que l'on a trouvée ci-deſſus (n°. 205, 206), pour l'expreſſion de $\overline{p+q}^{m}$.

PROPOSITION I.

210. Si on éleve un binome $p+q$ à une puiſſance quelconque dont l'expoſant m ſoit un nombre entier, le réſultat ſera un nombre de termes égal à $m+1$; c'eſt-à-dire, égal à l'expoſant de la puiſſance augmenté de l'unité. Le premier terme de cette puiſſance ſera la premiere partie p du binome, élevée au degré

demandé m ; le dernier terme ſera la ſeconde partie q élevée auſſi au degré demandé m : chaque autre terme entre le premier & le dernier, renfermera la premiere partie p élevée au degré demandé m diminué d'autant d'unités qu'il y aura de termes qui le précéderont, & multiplié par la ſeconde partie q du binome, élevée à une puiſſance du degré marqué par le nombre des termes précédens ; & le coefficient de ce terme ſera le produit des expoſans des puiſſances deſcendantes auxquelles la partie p a été élevée dans tous les termes précédens, diviſé par le produit des expoſans 1, 2, 3, &c. des puiſſances aſcendantes auxquelles la partie q a été élevée juſqu'à ce terme inclusivement.

PROPOSITION II.

211. Si on éleve un binome $p \pm q$ à une puiſſance dont l'expoſant ſoit une fraction, cette puiſſance ſera compoſée d'une ſuite infinie de termes dont le premier ſera la premiere partie du binome, élevée au degré de la puiſſance, & les autres termes ſuivront dans l'ordre énoncé dans la premiere propoſition, & auront des coefficiens formés de la même maniere.

ARTICLE II.

PROBLÊME I.

212. *Elever un binome à une puiſſance dont l'expoſant eſt un nombre entier ou une fraction.*

SOLUTION.

On pourra, pour réſoudre ce problême, ou employer les propoſitions I, II. (n°. 210, 211), en compoſant les termes de la puiſſance demandée ſelon la loi qui y eſt énoncée ; ou faire uſage de la formule

que l'on a trouvée pour la valeur de $\overline{p+q}^m$. (n°. 205, 206), en prenant d'abord dans cette formule autant de termes plus un qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance demandée, lorsque l'exposant est un nombre entier, & un grand nombre de ces termes lorsque l'exposant de la puissance sera une fraction; en faisant ensuite dans chacun de ces termes, le premier terme du binome proposé égal à p, & le second terme égal à q, & l'exposant de la puissance demandée égal à m.

On fera usage de cette seconde méthode dans les exemples suivans.

EXEMPLE I.

Elever le binome $ac+2b$ *à la quatrieme puissance.*

On prendra les cinq premiers termes de la formule touchant la valeur de $\overline{p+q}^m$, & faisant dans ces termes . . . . . $\begin{cases} ac=p \\ 2b=q \\ 4=m, \end{cases}$

on aura

$$p^m = \overline{ac}^4 = a^4c^4.$$

$$\frac{m}{1}p^{m-1}q = 4\times\overline{ac}^3\times 2b = 8a^3c^3b.$$

$$\frac{m\times\overline{m-1}}{1\times 2}p^{m-2}q^2 = 6\times\overline{ac}^2\times\overline{2b}^2 = 24a^2c^2b^2.$$

$$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{1\times 2\times 3}p^{m-3}q^3 = 4\times ac\times\overline{2b}^3 = 32acb^3.$$

$$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{1\times 2\times 3\times 4}p^{m-4}q^4 = \overline{ac}^0\times\overline{2b}^4 = 16b^4.$$

Enſorte que la quatrieme puiſſance de $ac + 2b$ ſera $a^4c^4 + 8a^3c^3b + 24a^2c^2b^2 + 32acb^3 + 16b^4$.

EXEMPLE II.

Elever le binome $a^2 - x^2$ *à la cinquieme puiſſance.*

On prendra les ſix premiers termes de la formule touchant la valeur de $\overline{p-q}^m$, & faiſant dans chacun de ces termes . . . . $\begin{cases} a^2 = p \\ x^2 = q \\ 5 = m. \end{cases}$

On aura :

$$p^m = \overline{a^2}^5 = a^{10}.$$

$$-\frac{m}{1}p^{m-1}q = -5 \times \overline{a^2}^4 \times x^2 = -5a^8x^2.$$

$$+\frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2}p^{m-2}q^2 = +10 \times \overline{a^2}^3 \times \overline{x^2}^2 = +10a^6x^4.$$

$$-\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3}p^{m-3}q^3 = -10 \times \overline{a^2}^2 \times \overline{x^2}^3 = -10a^4x^6.$$

$$+\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4}p^{m-4}q^4 = +5 \times a^2 \times \overline{x^2}^4 = +5a^2x^8.$$

$$-\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}p^{m-5}q^5 = -\overline{a^2}^0 \times \overline{x^2}^5 = -x^{10}.$$

Enſorte que la cinquieme puiſſance du binome $a^2 - x^3$, ou la valeur de $\overline{a^2 - x^2}^5$, ſera $a^{10} - 5a^8x^2 + 10a^6x^4 - 10a^4x^6 + 5a^2x^8 - x^{10}$.

EXEMPLE III.

Elever le binome $a^2 - x^2$ *à la puiſſance* $\frac{1}{2}$ *; c'eſt-à-dire, trouver la valeur de* $\sqrt{a^2 - x^2}$.

On prendra dans la formule touchant la valeur de $\overline{p-q}^m$, le plus de termes que l'on pourra, en faiſant dans chacun de ces termes $\begin{cases} a^2 = p \\ -x^2 = -q \\ \frac{1}{2} = m. \end{cases}$

On aura :

$$p^m = \overline{a^2}^{\frac{1}{2}} = a.$$

$$-\frac{m}{1} p^{m-1} q = -\frac{1}{2} \overline{a^2}^{\frac{-1}{2}} \times x^2 = -\frac{1}{2} a^{-1} x^2.$$

$$+\frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2} p^{m-2} q^2 = +\frac{1}{8} \overline{a^2}^{\frac{-3}{2}} \times \overline{x^2}^2 = +\frac{1}{8} a^{-3} x^4.$$

$$-\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3} p^{m-3} q^3 = -\frac{1}{16} \overline{a^2}^{\frac{-5}{2}} \times x^{\overline{2}^3} = -\frac{1}{16} a^{-5} x^6.$$

$$+\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} p^{m-4} q^4 = +\frac{5}{128} \overline{a^2}^{\frac{-7}{2}} \times \overline{x^2}^4$$

$$= +\frac{5}{128} a^{-7} x^8.$$

&c. = &c. . . . . = &c.

Et ainſi de ſuite.

Enſorte que la puiſſance fractionnaire $\frac{1}{2}$, ou la valeur de la racine quarrée de $a^2 - x^2$, ſera exprimée par la ſuite infinie, $a - \frac{1}{2} a^{-1} x^2 + \frac{1}{8} a^{-3} x^4 - \frac{1}{16} a^{-5} x^6 + \frac{5}{128} a^{-7} x^8$, &c. &c.

Ou (n°. 170), $a - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} + \frac{5x^8}{128a^7}$, &c. &c.

EXEMPLE IV.

Elever $a+b$ *à la puiſſance* $\frac{1}{3}$ *; c'eſt-à-dire, trouver la valeur de* $\sqrt[3]{a+b}$.

On prendra dans la formule touchant la valeur de $\overline{p+q}^{m}$, le plus de termes qu'il ſera poſſible, & faiſant dans chacun de ces termes $\begin{cases} a=p \\ b=q \\ \frac{1}{3}=m. \end{cases}$

On aura :

$$p^m = a^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{m}{1} p^{m-1} q = +\frac{1}{3} \times a^{-\frac{2}{3}} \times b = +\frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} b.$$

$$\frac{m \times m-1}{1 \times 2} p^{m-2} q^2 = -\frac{1}{9} a^{-\frac{5}{3}} \times b^2 = -\frac{1}{9} a^{-\frac{5}{3}} b^2.$$

$$\frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} p^{m-3} q^3 = +\frac{5}{81} \times a^{-\frac{8}{3}} \times b^3.$$

$$\frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 5} p^{m-4} q^4 = -\frac{10}{243} \times a^{-\frac{11}{3}} \times b^4$$

&c. = &c. . . . . = &c.

Enſorte que la puiſſance fractionnaire $\frac{1}{3}$, ou la valeur de la racine cubique de $a+b$. ſera exprimée par la ſuite infinie $a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} b - \frac{1}{9} a^{-\frac{5}{3}} b^2 + \frac{5}{81} a^{-\frac{8}{3}} b^3 - \frac{10}{243} a^{-\frac{11}{3}} b^4$, &c. &c.

Ou $a^{\frac{1}{3}} \times 1 + \frac{b}{3a} - \frac{b^2}{9a^2} + \frac{5b^3}{81a^3} - \frac{10b^4}{243a^4}$, &c. &c. &c.

PROBLÊME II.

213. *Elever un polinome à une puiſſance quelconque, dont l'expoſant ſoit un entier ou une fraction.*

SOLUTION.

Si le polinome eſt un trinome, en nommant p la ſomme des deux premiers termes, & q le troiſieme, ou p le premier, & q la ſomme du ſecond & du troiſieme, on pourra faire les puiſſances du trinome auſſi aiſément que l'on a fait celle du binome, puiſque dans les termes p^m, $\frac{m}{1}p^{m-1}q$, $\frac{m\times m-1}{1\times 2}p^{m-2}q^2$, &c. les quantités qu'il faudra élever ne ſeront au plus que des binomes.

Lorſque le polinome aura plus de trois termes, on réduira ſon élévation à celle d'une quantité plus ſimple.

On ſe contentera de donner des exemples ſur l'élévation des trinomes.

EXEMPLE I.

Elever à la quatrieme puiſſance le trinome $a+b+c$.

On prendra dans la formule touchant la valeur de $\overline{p+q}^m$ (n°. 205) les cinq premiers termes, & faiſant dans ces termes $\begin{cases} a+b=p \\ c=q \\ 4=m. \end{cases}$

On aura :

$$p^m = \overline{a+b}^4.$$

$$\frac{m}{1}p^{m-1}q = 4\times\overline{a+b}^3\times c.$$

$$\frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2} p^{m-2} q^2 = 6 \times \overline{a+b}^2 \times c^2.$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3} p^{m-3} q^3 = 4 \times \overline{a+b}^1 \times c^3.$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} p^{m-4} q^4 = \overline{a+b}^0 \times c^4.$$

On fera dans tous les termes les puiſſances de $a+b$, & les multiplications qui y ſont indiquées, & il viendra pour la quatrieme puiſſance de $a+b+c$, la quantité $a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3 c + 12a^2 bc + 12ab^2 c + 4b^3 c + 6a^2 c^2 + 12abc^2 + 6b^2 c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4$.

EXEMPLE II.

Elever à la puiſſance $\frac{1}{2}$ *le trinome* $a^2 + 2ab + b^2$.

On fera dans les termes de la formule touchant la valeur de $\overline{p+q}^m$. $\begin{cases} a^2 = p \\ 2ab + b^2 = q \\ m = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Et l'on aura :

$$p^m = \overline{a^2}^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{m}{1} p^{m-1} q = \frac{1}{2} a^{-1} \times \overline{2ab+b^2},$$

$$\frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2} p^{m-2} q^2 = -\frac{1}{8} a^{-3} \times \overline{2ab+b^2}^2,$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-3}}{1 \times 2 \times 3} p^{m-3} q^3 = +\frac{1}{16} a^{-5} \times \overline{2ab+b^2}^3,$$

&c. . . . . = &c.

Faiſant dans tous ces termes les puiſſances de $2ab+b^2$, & les multiplications qui y ſont indiquées,

on aura pour la puiſſance fractionnaire $\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, pour la valeur de la racine quarrée de $a^2+2ab+b^2$,

$$\overset{a}{+b}+\tfrac{1}{2}a^{-1}b^2$$
$$-\tfrac{1}{2}a^{-1}b^2-\tfrac{1}{2}a^{-2}b^3-\tfrac{1}{8}a^{-3}b^4$$
$$+\tfrac{1}{2}a^{-2}b^3+\tfrac{1}{4}a^{-3}b^4+\tfrac{1}{8}a^{-4}b^5+\tfrac{1}{16}a^{-5}b^6.$$
$$\&c. \qquad \&c. \qquad \&c.$$

Ce que l'on verra ſe réduire à $a+b$ que l'on ſait être la racine quarrée de la quantité propoſée (n°. 121), ſi on conſidere que le premier terme a reſtant tout entier de même que la premiere partie b du ſecond terme, la ſeconde partie $+\frac{1}{2}a^{-1}b^2$ ſe trouve effacée par la même quantité négative dans le troiſieme terme, que le reſte $-\frac{1}{2}a^{-2}b^3-\frac{1}{8}a^{-3}b^4$ du troiſieme terme eſt entiérement effacé dans le quatrieme terme qui ſe réduit alors à $+\frac{1}{8}a^{-3}b^4+\frac{1}{8}a^{-4}b^5+\frac{1}{16}a^{-5}b^6$, ce que l'on trouveroit effacé dans le cinquieme terme, & ainſi de ſuite. Enſorte que, en pouſſant à l'infini les termes de cette puiſſance fractionnaire $\frac{1}{2}$, & en ajoutant enſemble tous ces termes, le tout ſe réduiroit à $a+b$.

REMARQUES.

I.

214. L'Exemple précédent, & les Exemples III. & IV. du Problême II. (n°. 213), font connoître qu'à l'aide de la formule touchant la valeur de $\overline{p+q}^{\frac{m}{n}}$ (n°. 205, 206), on peut extraire une racine quelconque d'une quantité propoſée, en élevant par le moyen de cette formule la quantité propoſée à une puiſſance dont l'expoſant ſoit une fraction qui ait l'unité pour numérateur, & pour dénominateur l'expoſant de la racine demandée.

Lorſque l'on aura formé un grand nombre de ter-

mes de cette puiſſance, ſi comme dans l'Exemple II. du Problême II. (n°. 215), on obſerve que dans ces termes certaines quantités ne ſe détruiſant pas par les ſignes contraires + & —, toutes les autres ſe détruiſent dans les termes ſucceſſifs, on conclura que la quantité propoſée eſt une puiſſance exacte du degré de la racine demandée, & ſa racine ſera compoſée des quantités qui ne ſe détruiſent pas par les ſignes + & —.

215. Si la quantité propoſée n'eſt pas une puiſſance du degré marqué par l'expoſant de la racine demandée, comme la puiſſance fractionnaire que l'on formera n'eſt la vraie racine qu'autant qu'elle eſt imaginée pouſſée à l'infini (n°. 211), cette puiſſance ſera évidemment une racine approchée, lorſqu'on ne la compoſera que d'un certain nombre de termes, & elle ſera une racine d'autant plus approchée, qu'elle comprendra un plus grand nombre de termes.

216. Il eſt encore à obſerver que ſi dans un binome le ſecond terme eſt conſidérablement plus petit que le premier, la racine que l'on déterminera en élevant, comme on l'a dit, ce binome à une puiſſance fractionnaire, pourra être très-approchée en ne pouſſant la puiſſance fractionnaire qu'à un petit nombre de termes; parce que les termes de cette puiſſance qui ſuivent le premier, n'étant que des puiſſances aſcendantes du ſecond terme du binome, diviſées par des puiſſances aſcendantes du premier terme, les quotiens ou les valeurs de ces termes ſeront d'autant moindres, & arriveront d'autant plûtôt à un degré de petiteſſe que l'on pourra négliger, que le ſecond terme du binome ſera plus petit à l'égard du premier.

Pour rendre cette remarque ſenſible, on reprendra la puiſſance $\frac{1}{2}$ ou la racine quarrée de $a^2 - x^2$, dont

les premiers termes ſont $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$, &c. (n°. 212 & 213).

faiſant dans les termes $x = \frac{a}{10}$,

ils deviennent $a - \frac{a}{20} - \frac{a}{80000} - \frac{a}{16000000} - \frac{a}{1280000000}$ &c.

ou . . . $a \times 1 - \frac{1}{20} - \frac{1}{80000} - \frac{1}{16000000} - \frac{1}{1280000000}$ &c.

Le cinquieme terme de cette racine étant déja d'une petiteſſe à être négligé, l'on pourra, à plus forte raiſon, négliger les termes qui le ſuivent.

II.

217. On peut encore ſe ſervir de la formule touchant la valeur de $\overline{p \pm q}^m$, pour trouver la valeur approchée des quantités compoſées de tant de radicaux que l'on voudra, même de ces quantités qui pourroient d'abord paroître imaginaires, parce qu'elles ont des parties qui ſont imaginaires.

Si l'on propoſe, par exemple, de trouver la valeur approchée de $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$, on élevera d'abord (n°. 205) à la puiſſance $\frac{1}{2}$ le binome $-a+b\sqrt{-1}$, ce qui donnera pour la valeur de $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$,

$$-a^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1} - \tfrac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 - \tfrac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1} + \tfrac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 + \text{&c.}$$

On élevera enſuite à la puiſſance $\frac{1}{3}$ le binome $a+b\sqrt{-1}$; & en changeant les ſignes des termes de cette puiſſance, à cauſe du ſigne qui affecte la par-

tie $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$, on aura pour la valeur de cette ſeconde partie,

$$-a^{\frac{1}{3}}-\tfrac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1}-\tfrac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^{2}+\tfrac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^{3}\sqrt{-1}$$
$$+\tfrac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^{4}-\text{\&c.}$$

On ajoutera enſemble les valeurs de $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ & de $-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$,

& la valeur de $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ ſera la ſuite infinie qui ne contient plus d'imaginaires.

$$-2a^{\frac{1}{3}}-\tfrac{2}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^{2}+\tfrac{20}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^{4}-\tfrac{308}{6581}a^{-\frac{17}{3}}b^{6}$$
$$+\text{\&c.}$$

laquelle ſe réduit à

$$-2a^{\frac{1}{3}}\times\sqrt{1+\frac{b^{2}}{9a^{2}}-\frac{243a^{4}}{10b^{4}}+\frac{154b^{6}}{6581a^{6}}}-\text{\&c.}$$

CHAPITRE HUITIEME.

Des Equations.

DÉFINITIONS.

218. PROPOSER un problême, c'eſt demander que l'on trouve la valeur d'une quantité ou de pluſieurs quantités inconnues; ce qui n'eſt évidemment poſſible qu'autant qu'en propoſant le problême, on aſſignera des quantités connues, que les Géometres nomment les *données* du problême, & les conditions auxquelles on pourra égaler les inconnues aux connues.

L'expreſſion de l'égalité de deux grandeurs complexes ou incomplexes eſt dite *équation*.

On a déja dit que l'on exprime l'égalité de deux grandeurs en les ſéparant par le ſigne $=$, toute la grandeur qui eſt à la gauche de ce ſigne, ſe nomme *premier membre* de l'équation, & celle qui eſt à la droite ſe nomme *ſecond membre*.

Par exemple, l'expreſſion $x+y=a$ eſt une équation, & elle ſignifie que la grandeur $x+y$, qui eſt le premier membre, eſt égale à la grandeur a qui eſt le ſecond membre.

Mettre un problême en équation, c'eſt exprimer toutes les conditions du problême par autant d'équations, en obſervant de déſigner les grandeurs connues par des chiffres ou par les premieres lettres de l'alphabet, & les inconnues par les dernieres: on rendra toutes ces définitions ſenſibles dans la queſtion ſuivante.

Si on propoſe, par exemple, de déterminer deux nombres qui ſoient tels que leur ſomme ſoit 100, *& leur différence* 30.

Cette queſtion eſt un problême que l'on réſoudra en déterminant chacun des deux nombres demandés.

Les deux nombres demandés ſont les inconnues du problême, on les déſignera par les dernieres lettres de l'alphabet; par exemple, le plus grand par x, & le plus petit par y.

Les deux nombres connus 100 & 30 ſont les données, on les déſignera par les premieres lettres; par exemple, 100 par a, & 30 par b.

L'une des conditions eſt que les deux nombres demandés valent enſemble 100, & l'autre que la différence de ces mêmes nombres eſt 30: les équations qui ſortent de ces conditions ſont $\begin{cases} 1^{re}\ x + y = a \\ 2^{e}\ x - y = b, \end{cases}$ dont la premiere exprime l'égalité que l'on ſuppoſe entre le nombre 100 déſigné par a, & la ſomme $x+y$ des deux nombres demandés.

Et la ſeconde exprime l'égalité que l'on ſuppoſe entre la différence $x-y$ des nombres demandés, & le nombre 30 déſigné par b.

Dégager l'inconnue, c'eſt faire enſorte qu'elle ſe trouve dans l'un des membres de l'équation ſeule, & égale à des grandeurs toutes connues.

Prendre ou tirer la valeur d'un terme ou d'une lettre dans une équation, c'eſt faire enſorte que ce terme ou que cette lettre faſſe ſeul un membre de l'équation, de quelques quantités connues ou inconnues que l'autre membre ſoit compoſé.

Réſoudre les équations, c'eſt faire enſorte qu'il ne reſte qu'une inconnue, lorſqu'il y en a pluſieurs, & qu'elle ſe trouve dégagée dans l'un des membres d'une nouvelle équation.

Une équation eſt dite ſimple ou *du premier degré*, lorſque l'inconnue ne ſe trouve qu'à ſa premiere puiſſance; & le problême qui conduit à une telle équa-

tion eſt dit auſſi du premier degré. Tel ſeroit le problême, dans lequel on demanderoit un nombre x qui fût tel que ſon triple étant ajouté au nombre 10 fît le nombre 100.

Car l'équation du problême ſeroit $3x+10=100$, dans laquelle l'inconnue x n'eſt qu'à ſa premiere puiſſance.

Une équation eſt dite *du ſecond degré*, lorſque le plus haut degré auquel l'inconnue eſt élevée eſt le quarré; & le problême qui donne cette équation eſt dit auſſi du ſecond degré.

Tel ſeroit le problême dans lequel on demanderoit un nombre tel que ſon triple, étant ajouté avec ſon quarré, fît le nombre 100.

Car l'équation de ce problême ſeroit $3x+x^2=100$.

Un problême eſt dit *déterminé* lorſqu'il n'eſt ſuſceptible que d'une ſolution, ou que d'un certain nombre de ſolutions : il eſt *indéterminé* lorſqu'il eſt ſuſceptible d'une infinité de ſolutions.

On l'appelle *impoſſible* lorſqu'à cauſe de la contradiction qu'il renferme, l'on ne peut déterminer la valeur des inconnues demandées : dans ce cas on ſatisfait au problême en en montrant l'impoſſibilité.

La ſolution d'un problême eſt compoſée de deux parties : la premiere conſiſte à mettre le problême en équation; la ſeconde, à dégager les inconnues.

La premiere de ces deux parties ne peut guere être renfermée dans des regles générales, ce n'eſt que par des exemples qu'on peut la rendre ſenſible.

La ſeconde partie ſera fondée, quant aux problêmes du premier & du ſecond degré, ſur les propoſitions ſuivantes.

SECTION PREMIERE.

REGLES POUR LES EQUATIONS EN GÉNÉRAL.

Regles pour les Equations du premier & du ſecond degré.

Problêmes relatifs aux Equations du premier & du ſecond degré.

ARTICLE I.

REGLES GÉNÉRALES DES EQUATIONS.

Regles particulieres pour les Equations du premier & du ſecond degré.

Regles générales des Equations.

PROPOSITION I.

219. *UN terme quelconque de l'un des membres de l'équation peut toujours paſſer en l'autre membre en changeant de ſigne.*

C'eſt-à-dire, qu'en général, 1°. *ſi l'on a* $x+b=c$, *on aura encore* . . . . . $x=c-b$, *en faiſant paſſer avec un ſigne contraire le terme* b *d'un membre dans l'autre.*

2°. *Si l'on a* . . . . . $x-b=c$, *on aura encore* . . . . . $x=c+b$, *en faiſant paſſer avec un ſigne contraire le terme* $-b$ *d'un membre dans l'autre.*

DÉMONSTRATION.

Cette premiere regle des équations que l'on nomme *tranſpoſition*, & qui conſiſte à effacer un terme dans le membre où il eſt, & à l'écrire dans l'autre membre

membre avec un ſigne contraire, eſt fondée ſur ce principe: *Si à des grandeurs égales on ajoute une même grandeur, les ſommes ſeront égales.*

Que l'on ajoute en effet la quantité $-b$ dans l'équation . . . . . $x+b=c$ à chacun des membres, leſquels ſont des grandeurs égales, il viendra . . . . . $x+b-b=c-b$; ce qui ſe réduira à l'équation . . . . . $x=c-b$, telle qu'on l'a eue en effaçant dans l'équation propoſée $x+b=c$ le terme b du premier membre, & en l'écrivant dans le ſecond avec le ſigne contraire —. Que l'on ajoute dans la ſeconde équation propoſée $x-b=c$, le terme $+b$ à chacun des deux membres, il viendra . . . . . $x-b+b=c+b$; ce qui ſe réduit à l'équation . . . . . $x=c+b$, telle qu'on l'a eue en effaçant dans l'équation propoſée le terme $-b$ au premier membre, & en l'écrivant au ſecond membre avec le ſigne contraire +.

CONSÉQUENCES.

220. 1°. *Lorſqu'une équation ne renfermera qu'une eſpece* x *d'inconnue, on pourra la changer en une autre dont l'un des membres renferme tous les termes affectés de l'inconnue* x, *& l'autre tout ce qui eſt entiérement connu.*

Que l'on ait, par exemple, l'équation $ax+b=c+dx$, en tranſpoſant le terme dx & le terme b, il viendra l'équation . . . . . $ax-dx=c-b$, dont le premier membre contient les termes affectés de l'inconnue, & le ſecond les termes connus.

Et par conſéquent lorſque l'inconnue ne ſera engagée que dans l'un des membres, & ſeulement par l'addition avec des quantités connues, poſitives ou négatives, on pourra toujours la dégager par la tranſpoſition.

Que l'on ait, par exemple, l'équation $x+c-b=a$, en transposant les termes $+c-b$, il viendra l'équation . . . . . $x=a-c+b$, dans laquelle l'inconnue x est toute dégagée.

221. 2°. *Lorsqu'une équation renfermera plus d'une inconnue, on pourra, par la transposition, tirer la valeur de l'une de ces inconnues, lorsqu'elle ne sera engagée que dans l'un des membres, & seulement par l'addition avec des grandeurs positives ou négatives.*

Que l'on propose, par exemple, de tirer la valeur de x dans l'équation . . . . $x+y-z=a$, on transposera les termes $-z$, $+y$, & l'on aura l'équation . . . . . $x=a-y+z$, laquelle donne la valeur de x en quantités connues & inconnues.

PROPOSITION II.

222. *Le diviseur de quelqu'un des termes de l'équation peut toujours passer en qualité de multiplicateur à tous les autres termes.*

C'est-à-dire, qu'en général, si l'on a l'équation . . . . . $a+\frac{x}{b}=c$,

on aura encore . . . . . $ab+x=bc$,

en enlevant le diviseur b *du terme* $\frac{x}{b}$, *& en multipliant par le diviseur tous les autres termes.*

DÉMONSTRATION.

Cette seconde regle des équations est fondée sur ce principe: *Des grandeurs égales multipliées par une même grandeur, donnent des produits égaux.*

Que l'on multiplie en effet dans l'équation proposée $a+\frac{x}{b}=c$, par le diviseur b, chacun des deux

membres, lesquels sont des grandeurs égales, il viendra l'équation . . . . . $ab + \frac{bx}{b} = bc$,

qui se réduira à l'équation . . . . $ab + x = bc$, telle qu'on l'a eue en enlevant dans l'équation proposée le diviseur b du terme $\frac{x}{b}$, & en multipliant par le diviseur b tous les autres termes.

CONSÉQUENCES.

223. 1°. *On pourra toujours faire disparoître le diviseur qui affecte l'inconnue* x, *comme on l'a vu dans l'équation* . . . . . $a + \frac{x}{b} = c$,

laquelle est devenue . . . . . $ab + x = bc$.

Et par conséquent lorsque l'inconnue ne sera engagée que dans l'un des membres, & seulement par la division; c'est-à-dire, avec une grandeur connue qui la divise, on pourra toujours la dégager par la multiplication.

Que l'on ait, par exemple, l'équation $\frac{x}{b} = a - c$, en enlevant le diviseur b du terme où il est, & en le faisant servir de multiplicateur à tous les autres termes; c'est-à-dire, en multipliant les deux membres de l'équation par ce diviseur b, il viendra l'équation . . . . . $x = ab - bc$, dans laquelle l'inconnue est toute dégagée.

224. 2°. *On pourra encore, par cette seconde regle des équations, prendre dans une équation la valeur de l'une des inconnues qui s'y trouveront, lorsque cette inconnue ne sera engagée que dans l'un des membres, & seulement par la division avec des grandeurs connues & inconnues.*

Que l'on propoſe, par exemple, de tirer la valeur de x dans l'équation . . . . . $\frac{x}{y} = a + z$, on multipliera les deux membres de l'équation par le diviſeur y, & il viendra l'équation $x = ay + yz$, laquelle donne la valeur de x en quantités connues & inconnues.

225. 3°. *Lorſqu'une équation renfermera pluſieurs fractions, ſi on en enleve ſucceſſivement chaque dénominateur du terme où il eſt, pour le faire paſſer en qualité de multiplicateur à tous les autres termes, l'équation ſe trouvera à la fin toute délivrée de fractions.*

Que l'on propoſe, par exemple, de délivrer des fractions l'équation . . . . . $\frac{a}{x} + \frac{x}{c} = b$, en multipliant d'abord chaque membre de l'équation par le dénominateur x, il viendra l'équation . . . . . $a + \frac{x^2}{c} = bx$. En multipliant enſuite chaque membre de cette nouvelle équation par le dénominateur c, il viendra l'équation . . . . . $ac + x^2 = bcx$, laquelle eſt toute délivrée de fractions.

Mais ſi on obſerve que le produit des dénominateurs que l'on veut enlever eſt diviſible par chacun de ces dénominateurs, on conclura une méthode plus courte de faire diſparoître tant de dénominateurs que l'on voudra : elle conſiſte à multiplier tous les termes de l'équation par le produit des dénominateurs que l'on veut enlever.

Par exemple, étant donnée l'équation $\frac{a}{x} + \frac{x}{c} = b$, on fera le produit cx des dénominateurs des deux fractions qui entrent dans cette équation ; l'on multipliera enſuite tous les termes de l'équation par le pro-

on diviſera chaque membre de cette équation par le multiplicateur $b-y$ de l'inconnue x, & il viendra l'équation . . . . . $x = \frac{a+z}{b-y}$, laquelle donne la valeur de x en quantités connues & inconnues.

Regles propres aux équations du premier degré.

PROPOSITION I.

229. *Une grandeur inconnue étant engagée dans l'un des membres d'une équation, ou dans tous les deux, on pourra toujours la dégager; c'eſt-à-dire, réſoudre l'équation.*

DÉMONSTRATION.

Cette regle eſt pour l'équation du premier degré; & dans cette ſorte d'équation l'inconnue ne ſe trouve autrement engagée avec les connues que par l'addition, ou la multiplication, ou la diviſion, ſelon que cette inconnue fait dans l'un des membres, ou dans tous les deux, une ſomme avec des données poſitives ou négatives, ou un produit, ou une fraction avec une ou pluſieurs quantités données; ou l'inconnue ſera engagée de deux de ces façons tout à la fois, ou des trois.

Or on a vu dans la propoſition (n°. 219) comment l'on dégage l'inconnue lorſqu'elle ſe trouve dans l'un des membres de l'équation ajoutée avec des grandeurs connues poſitives ou négatives.

On a vu dans la propoſition (n°. 222) comment l'on dégage l'inconnue lorſqu'elle fait dans l'un des membres des fractions avec des données.

Enfin on a donné dans la propoſition (n°. 226) le moyen de dégager l'inconnue lorſqu'elle fait dans l'un des membres un produit avec des données.

Que ſi l'inconnue ſe trouve engagée dans l'un des membres de l'équation de deux des manieres dont on vient de parler, ou des trois manieres à la fois, on la dégagera en employant ſucceſſivement celle des regles des équations qui ſeront relatives à la maniere dont elle ſera engagée.

Que ſi l'inconnue ſe trouve engagée dans ſes deux membres, on fera paſſer dans l'un des membres tous les termes affectés de l'inconnue, & les termes tous connus dans l'autre (n°. 220). Alors le tout étant réduit, l'inconnue ne ſera plus engagée que dans l'un des membres, & on la dégagera comme on vient de l'expliquer.

Pour aider dans l'application de cette regle, on propoſera différentes équations à réſoudre.

EXEMPLE I.

230. *Réſoudre l'équation* $2bc + 3bx - ax = 3bc + ab + bx$.

1°. On tranſpoſera le terme tout connu $2bc$ du premier membre, & le terme $+bx$ affecté de l'inconnue du ſecond; ce qui donnera,

$$3bx - bx - ax = 3bc + ab - 2bc,$$

& ſe réduira à . . . . $2bx - ax = bc + ab$.

2°. Comme dans cette nouvelle équation l'inconnue x eſt multipliée par $2b - a$, on la dégagera en diviſant chaque membre par $2b - a$, & l'on aura l'équation réſolue . . . . . $x = \frac{bc + ab}{2b - a}$.

EXEMPLE II.

Réſoudre l'équation $x - \frac{bd}{3c} = \frac{bx}{2a} - \frac{3ac}{b}$.

1°. On tranſpoſera le terme tout connu $-\frac{bd}{3c}$, &

le terme $\frac{bx}{2a}$ affecté de l'inconnue ; ce qui donnera . . . . . $x - \frac{bx}{2a} = \frac{bd}{3c} - \frac{3ac}{b}$.

2°. Comme dans cette nouvelle équation l'inconnue x fait une fraction, on multipliera les termes de cette équation par le dénominateur $2a$ de cette fraction, & il viendra . . . . . $2ax - bx = \frac{2abd}{3c} - \frac{6a^2c}{b}$.

3°. Comme dans cette troiſieme équation l'inconnue x eſt multipliée par $2a - b$, on diviſera chaque membre par $2a - b$, & l'on aura l'équation réſolue . . . . . $x = \frac{2abd}{6ac - 3bc} - \frac{6a^2c}{2ab - b^2}$.

EXEMPLE III.

Réſoudre l'équation $x - d = c - \frac{x}{c - d}$.

1°. On tranſpoſera le terme $-\frac{x}{c-d}$ affecté de l'inconnue, & le terme tout connu d ; ce qui donnera . . . . . $x + \frac{x}{c-d} = c + d$.

2°. On délivrera dans cette nouvelle équation le terme $\frac{x}{c-d}$ de ſon diviſeur, en multipliant chaque membre de la nouvelle équation par le diviſeur $c-d$, & il viendra . . . $cx - dx + x = c^2 - d^2$.

3°. On diviſera chaque membre de cette troiſieme équation par le multiplicateur $c - d + 1$ de l'inconnue, & l'on aura enfin l'équation réſolue $x = \frac{c^2 - d^2}{c - d + 1}$.

PROPOSITION II.

231. *Deux inconnues étant engagées comme l'on voudra, chacune dans deux équations, on pourra tou-*

jours réduire les deux équations à une ſeule qui ne contiendra plus que l'une des deux inconnues, & par le moyen de laquelle on pourra dégager l'autre inconnue.

DÉMONSTRATION.

En ſuppoſant que deux inconnues x, z ſont engagées comme l'on voudra, chacune dans deux équations, il eſt évident que ſi l'on tire dans chacune de ces deux équations la valeur de l'une x de ces inconnues (221, 224, 228), & que l'on compare enſemble cette double valeur de x, exprimée par le moyen des connues & de l'autre inconnue z, on aura une nouvelle équation qui ne contiendra plus qu'une ſeule inconnue z, que l'on dégagera en appliquant la regle précédente; & cette valeur de z étant miſe à la place de z dans les mêmes circonſtances, où ſe trouvera cette inconnue z dans l'une des valeurs de x que l'on aura miſe à part, on aura encore la valeur de x en quantités toutes connues.

L'exemple ſuivant rendra ſenſible cette maniere de réſoudre deux équations.

EXEMPLE.

232. *Connoître deux grandeurs* x, z *qui ſoient telles que leur ſomme* $x+z$ *ſoit égale à la grandeur connue* a, *& que l'excès de la plus grande* x *ſur la plus petite* z, *ſoit égal à la grandeur connue* b.

Les équations du problême ſeront $\begin{cases} 1^{re}\ x+z=a \\ 2^{e}\ x-z=b; \end{cases}$ & pour réſoudre ces équations, c'eſt-à-dire, pour avoir les inconnues x & z dégagées chacune dans une nouvelle équation, on opérera comme il ſuit.

On commencera par tirer la valeur de x dans cha-

cune des premieres équations, & l'on mettra une de ces valeurs à part.

On tirera (221) $\begin{cases} \text{de la 1re } x = a - z \\ \text{de la 2e } x = b + z \end{cases}$ Double valeur de x. $\{x = a - z.$ Equation mise à part.

On comparera enſemble ces deux valeurs de x, & l'on aura la nouvelle équation $b + z = a - z$, laquelle ne contient plus que l'inconnue z.

On dégagera l'inconnue z dans cette nouvelle équation, en tranſpoſant $-z$ du ſecond membre, & $+b$ du premier, l'on aura . . . . . $2z = a - b$, & diviſant chaque membre par le multiplicateur 2 de l'inconnue z, il viendra l'équation réſolue $z = \frac{a-b}{2}$; laquelle fait connoître que la plus petite des deux grandeurs inégales eſt égale à la moitié de la ſomme de ces grandeurs, moins leur demi-différence.

On prendra l'équation miſe à part $x = a - z$; & changeant les ſignes de la valeur trouvée $\frac{a-b}{2}$ de la grandeur z, on la mettra à la place de $-z$, étant évident que z étant retranchée de la grandeur a dans l'équation . . . . . $x = a - z$, ſa valeur $\frac{a-b}{2}$ doit être ſubſtituée en la retranchant; c'eſt-à-dire, en la faiſant devenir $-\frac{a+b}{2}$, & l'on aura l'équation . . . . . $x = a - \frac{a+b}{2}$, laquelle, en changeant l'entier a en la fraction $\frac{2a}{2}$, devient . . . . . $x = \frac{2a-a+b}{2}$, & ſe réduit à . . . . . $x = \frac{a+b}{2}$;

ce qui fait connoître que la plus grande de deux grandeurs inégales eſt égale à la moitié de la ſomme de ces deux grandeurs, plus à leur demi-différence.

PROPOSITION III.

233. *Quel que ſoit le nombre des inconnues* v, x, y *& z engagées dans pluſieurs équations, pourvu qu'il y ait au moins autant d'équations que d'inconnues, on pourra arriver à une équation qui ne contiendra plus qu'une inconnue, & par le moyen de laquelle on viendra à bout de dégager chacune des autres.*

DÉMONSTRATION.

Si l'on tire la valeur de l'une *v* des inconnues dans toutes celles des équations du problême où ſe trouve cette inconnue, & qu'ayant mis à part une de ces valeurs, on compare enſemble toutes ces valeurs, à ſavoir, la premiere à la ſeconde, à la troiſieme, &c. & qu'avec les équations qui réſulteront de la comparaiſon de ces valeurs, on écrive celles des premieres équations où n'étoit point cette inconnue, s'il s'en trouve; on aura de nouvelles équations qui renfermeront une inconnue de moins que celles dans leſquelles on a mis le problême; on appellera ces nouvelles équations *les ſecondes équations*, par oppoſition à celles par leſquelles on aura d'abord exprimé les conditions du problême, que l'on nomme *les premieres équations*.

Si l'on tire la valeur de l'une *x* des autres inconnues dans toutes celles des ſecondes équations où elle ſe trouve, & qu'ayant mis à part une de ces valeurs, on compare enſemble toutes ces valeurs, la premiere à la ſeconde, à la troiſieme, &c. & qu'avec les équations qui réſulteront de cette comparaiſon, on écrive celles des ſecondes équations où n'étoit point cette in-

connue x, s'il s'en trouve, on aura des *troiſiemes équations* qui renfermeront deux inconnues de moins que les premieres; à ſavoir, les inconnues v & x.

En opérant ſur les troiſiemes équations comme on a fait ſur les ſecondes, on aura des *quatriemes équations* qui renfermeront trois inconnues de moins que les premieres; & il eſt viſible qu'en continuant ces opérations, on pourra enfin arriver à une équation qui ne renfermera plus qu'une inconnue z que l'on pourra dégager en appliquant la regle de la propoſition (n°. 229); & cette valeur de z étant ſubſtituée dans celle des équations miſes à part, où ſe trouvera cette inconnue z avec une ſeule autre inconnue, on aura cette autre inconnue dégagée.

Les valeurs de ces deux inconnues premiérement dégagées étant ſubſtituées dans celle des équations miſes à part, où ſe trouveront les deux inconnues avec une ſeule autre inconnue, on aura une troiſieme inconnue dégagée.

En continuant de ſubſtituer ainſi dans les autres équations miſes à part les valeurs des inconnues premiérement dégagées, chacune des inconnues ſe trouvera dégagée, & le problême ſera réſolu.

L'exemple ſuivant rendra ſenſible cette maniere de réduire les équations, & de dégager chaque inconnue dans une nouvelle équation.

EXEMPLE.

234. *Connoître quatre nombres* v, x, y, z, *qui ſoient tels.*

1°. *Que la différence* $v+x+y-z$ *de la ſomme des trois premiers au quatrieme ſoit égale à un nombre connu & déſigné par* a, *enſorte que l'on ait* $v+x+y-z=a$.

2°. *Que la différence* $v+x+z-y$ *de la ſomme*

des deux premiers & du quatrieme au troiſieme, ſoit égale à un nombre connu & déſigné par b, *enſorte que l'on ait* v + x + z − y = b.

3°. *Que la différence* v + y + z − x *de la ſomme du premier & des deux derniers au ſecond, ſoit égale à un nombre connu déſigné par* c, *enſorte que l'on ait* v + y + z − x = c.

4°. *Enfin que la différence* y + x + z − v *de la ſomme des trois derniers au premier, ſoit égale à un nombre connu déſigné par* d, *enſorte que l'on ait* x + y + z − v = d.

Pour déterminer ces nombres, on écrira les unes ſous les autres les équations du problême de cette ſorte :

Premieres équations.

$$\begin{aligned} v + x + y - z &= a \\ v + x + z - y &= b \\ v + y + z - x &= c \\ x + y + z - v &= d. \end{aligned}$$

Puis pour réduire en équations de façon que l'on ait chaque inconnue dégagée dans une nouvelle équation, on opérera comme il ſuit.

1°. On tirera dans toutes les premieres équations la valeur de l'une des inconnues ; par exemple, de v, & l'on mettra une de ces valeurs à part. On tirera (221) :

Valeurs de v.

De la 1re $v = a + z - x - y$
De la 2e $v = b + y - x - z$
De la 3e $v = c + x - y - z$
De la 4e $v = x + y + z - d$

1re Equation miſe à part. $\{ v = a + z - x - y.$

On comparera enſemble toutes ces valeurs de v ; par exemple, la premiere valeur à la ſeconde, à la troiſieme, à la quatrieme, & l'on aura :

Secondes Equations. Secondes Equations abrégées.

$$\left.\begin{array}{l} a+z-x-y=b+y-x-z \\ a+z-x-y=c+x-y-z \\ a+z-x-y=x+y+z-d \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 2z-2y=b-a \\ 2z-2x=c-a \\ 2x+2y=a+d. \end{array}\right.$$

2°. On tirera la valeur d'une autre inconnue ; par exemple, de z dans toutes celles des ſecondes équations abrégées où z ſe trouve, & l'on mettra une de ces valeurs à part. On tirera (n°. 221, 228) :

Valeurs de z.

De la 1re $z=\frac{b-a}{2}+y$

De la 2e $z=\frac{c-a}{2}+x$

2e Equation miſe à part.

$$\left\{z=\frac{b-a}{2}+y.\right.$$

On comparera enſemble les valeurs priſes de l'inconnue z, & l'on écrira celle des ſecondes équations où l'inconnue z ne ſe trouve point ; à ſavoir, $2x+2y=a+d$, & l'on aura :

Troiſiemes Equations. 3es Equations abrégées.

$$\left.\begin{array}{l} y+\frac{b-a}{2}=\frac{c-a}{2}+x \\ 2x+2y=a+d \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} y-x=\frac{c-b}{2} \\ y+x=\frac{a+d}{2} \end{array}\right.$$

3°. On tirera la valeur d'une troiſieme inconnue ; par exemple, de y dans les troiſiemes équations abrégées, & l'on mettra à part une de ces valeurs. On tirera :

De la 1re $y=\frac{c-b}{2}+x$ (221)

De la 2e $y=\frac{a+d}{2}-x$ (228)

3e Equation miſe à part.

$$\left\{y=\frac{c-b}{2}+x\right.$$

On comparera enſemble les deux valeurs de y, & on aura la derniere équation $\frac{c-b}{2}+x=\frac{a+d}{2}-x$, laquelle ne contient plus que l'inconnue x.

Et comme il y a une équation de moins que d'inconnues, on va voir que l'on ne pourra dégager toutes les inconnues.

Tirant la valeur de x *dans les deux premieres équations, & mettant à part une de ces valeurs, on aura :*

Valeurs de *x*. — Equation miſe à part.

De la 1re $x = 100 - y - z$
De la 2e $x = 40 + z - y$ $\left\{ x = 100 - y - z. \right.$

Comparant enſemble ces deux valeurs de x, *on aura la nouvelle équation* $40 + z - y = 100 - y - z$,

Seconde Equation. — Seconde Equation abrégée.

qui ſe réduit à . . . $2z = 100 - 40 = 60.$

Diviſant par 2 *cette ſeconde équation abrégée, il viendra* $z = \frac{60}{2} = 30.$

Reprenant à préſent l'équation miſe à part $x = 100 - y - z$, *& mettant à la place de* $-z$ *ſa valeur retranchée* -30, *il viendra* $x = 100 - 30 - y$, *& en réduiſant on aura* $x = 70 - y$; *ce qui ne fera connoître la valeur de* x *qu'en ſuppoſant une valeur à* y.

Par exemple, ſi on fait $y = 12$, *l'équation* $x = 70 - y$ *deviendra* $x = 70 - 12 = 58$, *& les trois nombres* 58, 12, 30, *ſatisferont aux conditions du problême ; car* x *étant égale à* 58, y *à* 12, *& z à* 30, *on aura :*

$$x + y + z = 58 + 12 + 30 = 100$$
$$x + y - z = 58 + 12 - 30 = 40.$$

Si l'on fait $y = 15$, *l'équation* $x = 70 - y$ *deviendra* $x = 70 - 15 = 55$, *& les trois nombres* 55, 15 *& 30 ſatisferont encore aux conditions du problême ; car* x *étant égale à* 55, y *à* 15, z *à* 30, *on aura :*

$$x + y + z = 55 + 15 + 30 = 100$$
$$x + y - z = 55 + 15 - 30 = 40.$$

Et comme les deux nombres x *&* y *doivent faire en-*

ſemble 70, *comme on le voit par l'équation* $x = 70 - y$, *laquelle devient, par la tranſpoſition,* $x + y = 70$, *il eſt évident que le problême propoſé pourra avoir* 69 *ſolutions en nombres entiers & poſitifs, en faiſant* y *égal ſucceſſivement aux nombres depuis* 1 *juſqu'à* 69 *incluſivement; que ſi le problême permet de faire* y *égal à une fraction, ou à un nombre compoſé d'entier & fraction tel que l'on voudra, moindre cependant que* 69; *ce qui eſt toujours poſſible lorſque les nombres demandés ne déſignent pas des choſes indiviſibles de leur nature, alors le problême ſera ſuſceptible d'une infinité de ſolutions.*

On voit par cet exemple que lorſqu'un problême donne une équation de moins que d'inconnues, il eſt indéterminé; que ſi le nombre des inconnues devient plus grand par rapport au nombre des équations, le problême ſera plus qu'indéterminé, parce que le nombre des inconnues que l'on ne pourra pas dégager étant alors plus grand, il y aura plus de valeurs arbitraires à ſuppoſer, & dès lors plus de ſolutions différentes.

Regles propres aux Equations du ſecond degré.

DÉFINITION.

On nommera *coefficient* de l'inconnue la grandeur quelconque connue, différente ou non de l'unité, entiere ou fractionnaire, qui multipliera l'inconnue.

PROPOSITION I.

236. *Lorſque l'un des membres d'une équation ne renfermera que l'inconnue affectée d'un coefficient quelconque, & ajoutée avec ſon quarré, ſi l'on ajoute à chaque membre de l'équation le quarré de la moitié du coefficient de l'inconnue, l'équation ſubſiſtera, & le membre où ſe trouvera l'inconnue avec ſon quarré & celui de*

la moitié de ſon coefficient, ſera un quarré parfait, dont la racine quarrée ſera la ſomme de l'inconnue & de la moitié de ſon coefficient.

DÉMONSTRATION.

Que dans l'équation générale $x^2 + xn = a$, laquelle renferme dans ſon premier membre l'inconnue x affectée d'un coefficient quelconque repréſenté par n, & ajoutée avec ſon quarré x^2, on ajoute à chaque membre le quarré $\frac{n^2}{4}$ de la moitié du coefficient n.

1°. Les membres ainſi augmentés également reſteront égaux; enſorte que l'on aura $x^2 + xn + \frac{n^2}{4} = a + \frac{n^2}{4}$; car des grandeurs égales augmentées également reſtent égales.

2°. Le premier membre $x^2 + xn + \frac{n^2}{4}$ de cette nouvelle équation ſera un quarré parfait dont la racine quarrée ſera la ſomme $x + \frac{n}{2}$ de l'inconnue x & de la moitié de ſon coefficient n: car la quantité $x^2 + xn + \frac{n^2}{4}$ renferme évidemment les produits qui compoſent le quarré du binome $x + \frac{n}{2}$; à ſavoir, le quarré du premier terme, le double du premier multiplié par le ſecond & le quarré du ſecond (n°. 161), que l'on faſſe en effet le quarré de $x + \frac{n}{2}$, on trouvera $x^2 + xn + \frac{n^2}{4}$.

PROPOSITION II.

237. *Lorſque l'un des membres d'une équation ne renfermera que l'inconnue affectée d'un coefficient quelconque, & retranchée de ſon quarré, ſi l'on ajoute à chaque membre de cette équation le quarré de la moitié du*

coefficient de l'inconnue, l'équation ſubſiſtera, & le membre où ſe trouvera l'inconnue avec ſon quarré & celui de la moitié de ſon coefficient ſera un quarré parfait dont la racine quarrée ſera la différence de l'inconnue & de la moitié de ſon coefficient.

DÉMONSTRATION.

Que dans l'équation générale $x^2 - xn = a$, laquelle renferme dans ſon premier membre l'inconnue x affectée du coefficient quelconque n, & retranchée de ſon quarré x^2, on ajoute à chaque membre le quarré $\frac{n^2}{4}$ de la moitié du coefficient n.

1°. Les membres ainſi augmentés également reſteront égaux; enſorte que l'on aura $x^2 - xn + \frac{n^2}{4} = a + \frac{n^2}{4}$: car des grandeurs égales augmentées également reſtent égales.

2°. Le premier membre $x^2 - xn + \frac{n^2}{4}$ ſera un quarré parfait, dont la racine quarrée ſera la différence $x - \frac{n}{2}$ de l'inconnue x, & de la moitié de ſon coefficient n. Car la quantité $x^2 - xn + \frac{n^2}{4}$ contient évidemment les produits qui compoſent le quarré de la différence $x - \frac{n}{2}$; à ſavoir, la ſomme des quarrés de ces deux termes, moins deux fois le produit de l'un par l'autre (n°. 162); que l'on faſſe en effet le quarré de $x - \frac{n}{2}$, on trouvera $x^2 - xn + \frac{n^2}{4}$.

REMARQUES.

238. *La ſomme négative* $-x - \frac{n}{2}$ *élevée au quarré donne* (73 & 161) $x^2 + xn + \frac{n^2}{4}$, *& la différence*

$\frac{n}{2} - x$ élevée au quarré donne $x^2 - xn + \frac{n^2}{4}$; par conſéquent la racine quarrée du membre $x^2 + nx + \frac{n^2}{4}$ peut être également ou $x + \frac{n}{2}$, ou $-x - \frac{n}{2}$.

De même la racine quarrée du membre $x^2 - xn + \frac{n^2}{4}$ peut être également ou $x - \frac{n}{2}$, ou $\frac{n}{2} - x$.

PROPOSITION III.

Une grandeur inconnue étant engagée comme l'on voudra dans une équation avec des grandeurs connues & avec ſon quarré, on pourra toujours dégager cette inconnue ; & cette équation qui eſt du ſecond degré, ſera ſuſceptible de deux ſolutions.

DÉMONSTRATION de la premiere partie.

239. Une grandeur inconnue étant engagée comme l'on voudra dans une équation avec des grandeurs connues, & avec ſon quarré, on pourra toujours faire enſorte que l'on ait dans l'un des membres de l'équation, 1°. le quarré de l'inconnue affecté du ſigne +, & ſans être multiplié ni diviſé par aucune grandeur ; 2°. l'inconnue affectée d'un coefficient quelconque, & dans l'autre membre des grandeurs toutes connues ; & ſi l'on ajoute enſuite à chaque membre le quarré de la moitié du coefficient de l'inconnue, on aura une nouvelle équation dont le membre où ſe trouvera l'inconnue ſera un quarré parfait qui aura pour racine ou la ſomme de l'inconnue & de la moitié de ſon coefficient (n°. 236), ou la différence de l'inconnue & de la moitié de ſon coefficient (n°. 237).

Donc ſi l'on vient à extraire la racine quarrée de chaque membre de cette nouvelle équation (ce qui ne

troublera point l'équation, puiſque des grandeurs égales ont des racines quarrées égales), & que l'on tranſpoſe la grandeur connue qui affectera alors l'inconnue, cette inconnue ſera dégagée.

Les Exemples ſuivans rendront ſenſible cette regle des équations du ſecond degré.

EXEMPLE I.

Dégager l'inconnue x *dans l'équation* $xn = a - x^2$.

On tranſpoſera du ſecond membre, $-x^2$, pour le rendre poſitif, & il viendra $x^2 + xn = a^2$.

On ajoutera à chaque membre de cette nouvelle équation le quarré $\frac{n^2}{4}$ de la moitié du coefficient n de l'inconnue, pour faire le premier membre un quarré parfait (n°. 236); ce qui donnera $x^2 + xn + \frac{n^2}{4} = a + \frac{n^2}{4}$.

On extraira la racine quarrée du premier membre (122), & l'on mettra le ſigne radical devant le ſecond, parce qu'il eſt un quarré imparfait, & il viendra l'équation $x + \frac{n}{2} = \sqrt{a + \frac{n^2}{4}}$, laquelle ſe réduira à $x = \sqrt{a + \frac{n^2}{4}} - \frac{n}{2}$, en tranſpoſant $\frac{n}{2}$ (219, 220).

EXEMPLE II.

Dégager l'inconnue x *dans l'équation* $x^2 = a + xn$.

On tranſpoſera $+xn$, ce qui donnera $x^2 - xn = a$.

On ajoutera à chaque membre le quarré $\frac{n^2}{4}$ de la moitié du coefficient de l'inconnue pour faire le premier membre un quarré parfait (n°. 237), & il vient $x^2 - xn + \frac{n^2}{4} = a + \frac{n^2}{4}$; ce qui ſe réduira par

traction de la racine quarrée (122) à $x-\frac{n}{2}=\sqrt{a+\frac{n^2}{4}}$; & en transposant $-\frac{n}{2}$, l'équation résolue sera $x=\sqrt{a+\frac{n^2}{4}}+\frac{n}{2}$ (219).

EXEMPLE III.

Dégager l'inconnue x *dans l'équation* $x^2=a+x$.

On transposera x, & il viendra $x^2-x=a$.

On ajoutera à chaque membre de l'équation le quarré $\frac{1}{4}$ de la moitié du coefficient -1 de l'inconnue, & l'on aura $x^2-x+\frac{1}{4}=a+\frac{1}{4}$; ce qui se réduira par l'extraction de la racine quarrée (122), à $x-\frac{1}{2}=\sqrt{a+\frac{1}{4}}$; & en transposant $-\frac{1}{2}$, l'équation résolue sera $x=\sqrt{a+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}$ (219).

EXEMPLE IV.

Résoudre l'équation $cx^2+x=a$.

Comme le quarré x^2 de l'inconnue est multiplié par la grandeur c, on divisera d'abord chaque membre de cette équation par la grandeur c (227), pour délivrer le quarré x^2 de son multiplicateur, & il viendra $x^2+\frac{x}{c}=\frac{a}{c}$.

On ajoutera ensuite à chaque membre de cette nouvelle équation le quarré $\frac{1}{4c^2}$ de la moitié du coefficient de l'inconnue, & l'on aura $x^2+\frac{x}{c}+\frac{1}{4c^2}=a+\frac{1}{4c^2}$; ce qui se réduira, par l'extraction de la racine quarrée (122), à $x+\frac{1}{2c}=\sqrt{a+\frac{1}{4c^2}}$;

& en tranſpoſant $\frac{1}{2c}$, l'équation réſolue ſera $x = \sqrt{a + \frac{1}{4c^2}} - \frac{1}{2c}$ (219).

DÉMONSTRATION
de la ſeconde partie.

240. *A ſavoir, que l'équation du ſecond degré eſt ſuſceptible de deux ſolutions; c'eſt-à-dire, qu'en général dans cette ſorte d'équation l'inconnue* x *a deux valeurs.*

Pour s'en convaincre, on conſidérera qu'en multipliant par elle-même une grandeur négative $-a$, il vient un quarré poſitif a^2, de même que ſi l'on avoit multiplié la grandeur poſitive a par elle-même; d'où l'on conclura que la racine quarrée d'une grandeur poſitive peut être également affectée du ſigne + ou du ſigne —, ainſi qu'on l'a déja remarqué (n°. 238) au ſujet des propoſitions (n°. 236, 237).

Par conſéquent en reprenant l'équation $x + \frac{n}{2} = \sqrt{a + \frac{n^2}{4}}$, que l'on a tirée de l'équation du ſecond degré $x^2 + xn = a$, on pourra écrire également,

$$x + \tfrac{n}{2} = + \sqrt{a + \tfrac{n^2}{4}},$$

ou

$$x + \tfrac{n}{2} = - \sqrt{a + \tfrac{n^2}{4}};$$

ce qui donnera pour la valeur de l'inconnue x . . $\begin{cases} x = \sqrt{a + \frac{n^2}{4}} - \frac{n}{2} \\ x = - \sqrt{a + \frac{n^2}{4}} - \frac{n}{2}. \end{cases}$

Les Algébriſtes nomment ces deux valeurs de l'in-

Car en pouſſant juſqu'à la fin l'équation $x^2 = xn - a$, il viendra l'équation $x = -\frac{n}{2} \pm \sqrt{-a + \frac{n^2}{4}}$, dans laquelle la quantité ſous le ſigne radical ſera négative, & n'aura par conſéquent aucune racine quarrée ni négative, ni poſitive.

ARTICLE II.

Problêmes du premier & du ſecond degré.

243. L'on a déja dit que la ſolution d'un problême par les équations a deux parties.

1°. L'on commence par ſe faire une idée diſtincte de l'état de la queſtion; c'eſt-à-dire, que l'on s'applique à bien diſtinguer les trois choſes que tout problême doit renfermer : à ſavoir, les grandeurs connues, les grandeurs que l'on demande, ou celles qui ſervent à trouver celles que l'on demande; enfin les conditions deſquelles on tire les équations.

On déſigne enſuite les grandeurs par des lettres pour réduire le problême particulier à une queſtion générale, & l'on exprime par autant d'équations les conditions du problême; on a déja dit que les équations doivent être en pareil nombre que les inconnues, pour que le problême ait une ſolution complette.

2°. Lorſque le problême eſt mis en équation, il ne s'agit plus, pour trouver la valeur de chaque inconnue, que d'opérer ſur ces équations ſelon les regles que l'on a données dans la ſection précédente. On arrivera par le moyen de ces regles à des équations dans leſquelles les inconnues ſeront dégagées; & parce que le problême aura été exprimé généralement par le moyen des lettres, on pourra regarder ces équations où les inconnues ſeront dégagées, comme des

formules; c'eſt-à-dire, comme des méthodes générales pour réſoudre tous les problêmes dont les conditions ſeront ſemblables à celles du problême propoſé.

Réſolution des problêmes du premier degré.

PROBLÊME I.

244. *Diviſer un nombre donné en pluſieurs parties, la différence de la premiere à la ſeconde, de la ſeconde à la troiſieme, &c. étant donnée.*

EXEMPLE.

Partager 400 *en trois parties, de maniere que la ſeconde ſurpaſſe la premiere du nombre* 20, *& que la troiſieme ſurpaſſe la ſeconde de* 30.

SOLUTION.

Que le nombre 400 à partager ſoit exprimé par a.
La premiere partie demandée par . . . . . x.
L'excès 20 de la ſeconde partie ſur la premiere, par . . . . . b.
L'excès 30 de la troiſieme partie ſur la ſeconde, par . . . . . c.
Comme la ſeconde partie ſurpaſſe la premiere de 20, cette ſeconde partie ſera $x+20$, ou $x+b$.
Comme la troiſieme ſurpaſſe la ſeconde de 30, cette troiſieme partie ſera $x+20+30$, ou $x+b+c$.
Et ces deux dernieres expreſſions montrent qu'auſſitôt que l'on connoîtra la premiere partie x, on aura la ſeconde en faiſant la ſomme de l'excès 20, & de la valeur de x; & que pour avoir la troiſieme il faudra ajouter à la valeur de x la ſomme des excès 20 & 30.

Il n'y a donc qu'une ſeule inconnue x, & par conſéquent une ſeule équation à faire, & cette équation

ſe formera en comparant la ſomme des trois parties demandées avec le nombre à partager.

Or le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble, ainſi l'équation du problême ſera $x+x+b+x+b+c=a$, ou $3x+2b+c=a$.

On s'appliquera à préſent à dégager l'inconnue x dans cette équation; & pour y parvenir, on remarquera que ce qui empêche de connoître la valeur de x dans l'équation $3x+2b+c=a$, ce ſont d'abord les termes connus $2b+c$ qui ſe trouvent dans un même membre avec l'inconnue x, & enſuite le coefficient 3 de cette inconnue.

On tranſpoſera donc $2b+c$, & il viendra (220) $3x=a-2b-c$; & diviſant enſuite chaque membre par le coefficient 3 de l'inconnue (227), il viendra $x=\frac{a-2b-c}{3}$.

Pour tirer de cette ſolution générale, la valeur de x dans l'exemple propoſé, on mettra à la place des lettres a, b, c, les nombres 400, 20, 30 qu'elles déſignent dans l'équation réſolue généralement $x=\frac{a-2b-c}{3}$, & l'on aura $x=\frac{400-20\times 2-30}{3}$; ce qui ſe réduira à $x=\frac{330}{3}=110$, où l'on voit que la premiere partie demandée du nombre

400 eſt 110

Comme la ſeconde $=x+20$, elle ſera

de $110+20=$ 130

Comme la troiſieme $=x+20+30$, elle

ſera de $110+20+30=$ . . . 160

400 ſomme.

Et les trois nombres 110, 130, 160 ſont évidemment les trois parties cherchées, puiſqu'ils font enſemble le nombre qu'il falloit partager.

PROBLÊME II.

245. *Trouver un nombre connoiſſant la ſomme de quelqu'une de ſes parties chacune d'une dénomination donnée.*

EXEMPLE.

Un pere donnant la moitié de ſon bien à ſon fils aîné, le tiers au ſecond, le dixieme au troiſieme, il arrive que ces trois parts ſont enſemble 60000 livres, on demande quel eſt le bien de ce pere de famille?

SOLUTION.

Le bien total cherché étant déſigné par . . . x

La moitié ſera exprimée par . . . . . $\frac{x}{2}$

Son tiers par . . . . . $\frac{x}{3}$

Son dixieme par . . . . . $\frac{x}{10}$

Et comme on ſuppoſe que la moitié, le tiers & le dixieme de x font enſemble 60000 liv. l'équation du problême ſera $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{10}=60000$ liv.

Pour dégager l'inconnue x dans cette équation, on commencera par enlever les dénominateurs en multipliant chaque membre de l'équation par le produit $2\times3\times10$ de ces dénominateurs (225); ce qui donnera $\frac{x\times2\times3\times10}{2}+\frac{x\times3\times2\times10}{3}+\frac{x\times10\times2\times3}{10}=60000$ liv. $\times2\times3\times10$, & ſe réduira d'abord à $x\times3\times10+x\times2\times10+x\times2\times3=60000$ liv. $\times2\times3\times10$, & enſuite à $56x=3600000$ liv.

On diviſera enſuite cette nouvelle équation par le coefficient 56 de l'inconnue (227), & l'on aura l'équation réſolue $x=\frac{3600000}{56}$ liv. $=64285\frac{5}{7}$ liv.

laquelle fait connoître que le bien total cherché eſt de 64285 liv. $+\frac{5}{7}$ liv.

L'on trouve en effet que la moitié de 64285 liv. $+\frac{5}{7}$ liv. laquelle eſt de . . . . 32142 l. $+\frac{6}{7}$ l.
ſon tiers qui eſt de . . . . . 21428 $+\frac{4}{7}$
& ſon dixieme qui eſt de . . . . 6428 $+\frac{4}{7}$
ſont enſemble . . . . . 60000 liv.

PROBLÊME III.

246. *Trouver un nombre étant donnée la valeur de l'une de ſes parties, & ſeulement la dénomination des autres.*

EXEMPLE.

Un pere en partageant ſon bien à ſes enfans, en a donné la moitié à l'aîné, le ſixieme au ſecond, le cinquieme au troiſieme, & 6000 liv. au quatrieme, on demande quel étoit le bien de ce pere de famille.

SOLUTION.

Le bien total cherché étant déſigné par . . . x

Sa moitié ſera . . . . . $\frac{x}{2}$

Son ſixieme ſera . . . . . $\frac{x}{6}$

Son cinquieme ſera . . . . . $\frac{x}{5}$

Or la ſomme de ces trois parties étant retranchée du nombre cherché x, il reſte par la condition du problême 6000 livres pour la part du quatrieme enfant.

L'équation du problême ſera donc $x - \frac{x}{2} - \frac{x}{6} - \frac{x}{5} = 6000$ livres.

Pour

Pour dégager l'inconnue x dans cette équation, on commencera par enlever les dénominateurs dont elle eſt affectée, en multipliant chaque membre par le produit $2\times6\times5$ de ces dénominateurs (225); ce qui donnera $x\times2\times6\times5 - \frac{x\times2\times6\times5}{2} - \frac{x\times6\times2\times5}{6} - \frac{x\times5\times2\times6}{5} = 6000 \text{ liv.}\times2\times6\times5$, & ſe réduira d'abord à $x\times2\times6\times5 - x\times6\times5 - x\times2\times5 - x\times2\times6 = 6000 \text{ liv.}\times2\times6\times5$, & enſuite à $60x - 30x - 10x - 12x = 360000$ liv. & enfin à $8x = 360000$ liv.

On diviſera enfin cette derniere équation par le coefficient 8 de l'inconnue (227), & l'on aura l'équation réſolue $x = \frac{360000}{8}\text{ liv.} = 45000$ liv. laquelle fait connoître que le bien total cherché eſt de 45000 liv.

Que l'on prenne en effet la moitié de 45000 liv. laquelle eſt de . . . . . 22500 liv.
Son ſixieme qui eſt de 7500
Son cinquieme qui eſt de 9000
ſomme 39000

Et que l'on retranche la ſomme de ces trois parties, laquelle eſt de 39000 livres, du nombre trouvé 45000 liv. il reſtera 6000 liv. pour la part du quatrieme enfant.

PROBLÊME IV.

247. *Deux unités de différentes valeurs étant données, déterminer quelle partie il faudra prendre de chacune pour compoſer une unité d'une valeur moyenne donnée.*

EXEMPLE.

On veut compoſer un pied cube de matiere du

poids de 400 liv. avec deux matieres dont l'une peſe 500 liv. & l'autre 260 liv. le pied cube, connoître combien il faut prendre de chacune de ces deux eſpeces de matieres.

SOLUTION.

Que le pied cube de l'alliage ſoit déſigné par 1.
Et ſon poids 400 liv. par . . . . . *a*.
Le poids 1500 liv. du pied cube de la premiere matiere propoſée, par . . . . . *b*.
La partie de ce pied cube qui doit entrer dans l'alliage, par . . . . . *x*.
Le poids 260 livres du pied cube de la ſeconde matiere propoſée, par . . . . . *c*.
Et la partie de ce pied cube, qui doit entrer dans l'alliage, par . . . . . *y*,
on aura pour le poids de la partie *x* de la premiere matiere qui doit entrer dans l'alliage . . *bx*.

C'eſt-à-dire, le produit fait du poids de 500 liv. du pied cube de cette matiere, multiplié par la partie de cette matiere qui doit entrer dans l'alliage.

Etant évident que le tiers ou le cinquieme, &c. d'un pied cube qui peſe 500 liv. doit peſer le tiers, ou le cinquieme, &c. de 500 liv. en général; le poids d'une partie quelconque d'un pied cube qui peſe 500 liv. doit être le produit fait de la multiplication du poids 500 liv. par la quantité *x*, qui déſigne la fraction ou la partie de ce pied cube.

On aura de même pour le poids de la partie *y* de la ſeconde matiere qui doit entrer dans l'alliage, *cy*; c'eſt-à-dire, le produit du poids *c* du pied cube de cette ſeconde matiere, multiplié par la partie *y*. Mais la partie *x* que l'on doit prendre de la matiere qui peſe 500 liv. & la partie *y* que l'on doit prendre de la matiere qui peſe 260 livres le pied cube, doi-

vent faire enſemble le pied cube de l'alliage déſigné par 1.

De plus, les poids bx, cy de ces deux parties doivent faire enſemble le poids 400 liv. déſigné par a. Les équations du problême ſeront donc en employant les dénominations de ci-deſſus.

Premieres Equations.

$$x + y = 1$$
$$bx + cy = a.$$

Pour parvenir par le moyen de ces premieres équations à deux autres, dans leſquelles les inconnues x & y ſoient dégagées, on appliquera la regle de la propoſition (n°. 213).

On tirera d'abord la valeur de x dans chacune de ces premieres équations, & l'on mettra une de ces valeurs à part. On tirera :

De la premiere $x = 1 - y$ (221). Equation miſe à part. $\left\{ x = 1 - y. \right.$

De la ſeconde $x = \frac{a - cy}{b}$ (228).

Enſuite on comparera enſemble les deux valeurs de x, & l'on aura la nouvelle équation $\frac{a - cy}{b} = 1 - y$.

Pour dégager l'inconnue y dans cette nouvelle équation, on enlevera d'abord le dénominateur b en multipliant chaque membre par b (223); ce qui donnera $a - cy = b - by$.

On tranſpoſera le terme $-by$, & le terme a, parce que by eſt plus grand que cy, & l'on aura $by - cy = b - a$.

Enfin on diviſera chaque membre de cette derniere équation par le multiplicateur $b - c$ de l'inconnue (226), & l'on aura l'équation réſolue $y = \frac{b - a}{b - c}$; laquelle donne la valeur de y en quantités toutes connues.

Reprenant à préſent l'équation miſe à part $x = 1 - y$, on mettra à la place de $-y$ la valeur retranchée de y; c'eſt-à-dire, $\frac{-b+a}{b-c}$, & l'on aura $x = 1 \frac{-b+a}{b-c}$; ce qui fera d'abord en changeant l'entier 1 en la fraction $b - c$, $x = \frac{b-c-b+a}{b-c}$, & en réduiſant $x = \frac{a-c}{b-c}$, & le problême eſt tout réſolu : car ſi dans les équations . . . . . $\begin{cases} x = \frac{a-c}{b-c} \\ y = \frac{b-a}{b-c}, \end{cases}$ on met à la place des lettres a, b, c leurs valeurs affectées des mêmes ſignes qui affectent ces lettres, on aura . . . . . $\begin{cases} x = \frac{400-260}{500-260} = \frac{140}{240} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \\ y = \frac{500-400}{500-260} = \frac{100}{240} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}; \end{cases}$ ce qui montre que pour compoſer un pied cube de matiere qui peſe 400 liv. avec des matieres qui peſent l'une 500 liv. l'autre 260 liv. le pied cube, il faut prendre $\frac{7}{12}$ du pied cube qui peſe 500 liv. & $\frac{5}{12}$ du pied cube qui peſe 260 liv.

Ce qui remplit évidemment les deux conditions du problême.

Car, 1°. $\frac{7}{12} + \frac{5}{12}$ de pied cube $= \frac{12}{12}$ de pied cube $= 1$ pied cube.

2°. $\frac{7}{12}$ du poids 500 liv. $+ \frac{5}{12}$ du poids 260 liv. $=$ le poids 400 liv. du pied cube de l'alliage.

REMARQUE.

248. *Les équations* . . . . . $\begin{cases} x = \frac{a-c}{b-c} \\ y = \frac{b-a}{b-c}, \end{cases}$ *auxquelles on a été conduit dans l'exemple ci-deſſus,*

étant générales, elles montrent ce qu'il faudra faire toutes les fois que l'on proposera de composer une unité d'une valeur moyenne désignée par a, *avec des parties de deux unités de valeurs différentes* b, c *données; la premiere de ces équations déterminera toujours la partie* x *qu'il faudra prendre de l'unité de la plus grande valeur* b, *& la seconde fera connoître la partie* y *qu'il faudra prendre de l'unité de la moindre valeur* c; *mais dans la premiere équation* $x = \frac{a-c}{b-c}$, *l'expression* $\frac{a-c}{b-c}$ *de la partie* x *que l'on doit prendre de l'unité de la plus grande valeur* b, *est une fraction dont le numérateur est la différence* a — c *de la valeur moyenne* a *à la moindre valeur* c, *& le dénominateur est la différence* b — c *de la plus haute valeur à la moindre.*

Dans la seconde équation $y = \frac{b-a}{b-c}$, *l'expression* $\frac{b-a}{b-c}$ *de la partie* y *que l'on doit prendre de l'unité de la moindre valeur, est une fraction dont le numérateur* b — a *est la différence de la plus grande valeur* b *à la moyenne* a, *& dont le dénominateur est encore comme dans la premiere équation, la différence de la plus grande valeur* b *à la moindre* c.

Donc deux unités de différentes valeurs étant données, on déterminera la partie qu'il faudra prendre de chacune d'elles pour composer une unité d'une valeur moyenne donnée par cette méthode générale.

On fera deux fractions dont le dénominateur commun soit la différence de la plus grande des valeurs des deux unités données à la moindre, & qui ayent pour numérateur, l'une la différence de la valeur moyenne à la moindre, l'autre la différence de la plus grande valeur à la moyenne.

Celle de ces deux fractions, dont le numérateur sera

la différence de la valeur moyenne à la moindre, exprimera la partie qu'il faudra prendre de celle des deux unités données qui vaudra le plus, & l'autre fraction désignera la partie qu'il faudra prendre de celle des unités données qui vaudra le moins.

On appliquera cette regle générale à l'exemple suivant.

EXEMPLE.

Faire un ſac de bled à 9 livres, avec du bled à 11 livres, & du bled à 5 livres le ſac.

Les différens prix du bled étant ainſi diſpoſés . . . { Le plus grand 11 liv. / Le moyen . . . 9 liv. / Le moindre . 5 liv.

on prendra la différence du plus grand prix au moindre, laquelle eſt . . . . . 6 liv.

On prendra la différence du plus grand prix au moyen, laquelle eſt . . . . . 2 liv.

On prendra la différence du prix moyen au moindre, laquelle eſt . . . . . 4 liv.

Enſuite on fera les deux fractions $\left\{\begin{matrix}\frac{4}{6}\\ \frac{2}{6}\end{matrix}\right.$, dont le dénominateur commun ſoit la différence 6 du plus haut prix aux plus bas, & dont les numérateurs ſoient les différences 4 liv. & 2 liv. du prix moyen aux plus haut & au plus bas prix.

La premiere fraction $\frac{4}{6}$ dont le numérateur eſt la différence du prix moyen au plus bas, exprimera qu'il faudra prendre $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ de ſac du bled au plus haut prix 11 liv.

Et la ſeconde fraction $\frac{2}{6}$, dont le numérateur eſt la différence du plus haut prix au moyen, exprimera qu'il faut prendre $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$ de ſac du bled du moindre prix 5 liv.

PROBLÊME V.

249. *Etant donnée la valeur de chacune de deux eſpeces d'unités, déterminer le nombre d'unités qu'il faudra prendre de chacune de ces deux eſpeces, pour compoſer un alliage d'un nombre d'unités, & d'une valeur totale déterminée.*

EXEMPLE.

On veut faire 40 *ſacs de bled dont le prix total ſoit de* 200 *liv. avec du bled à* 9 *liv. & du bled à* 4 *liv. le ſac, déterminer combien l'on doit prendre de ſacs de bled à* 9 *liv. & combien l'on en doit prendre du bled à* 4 *liv.*

SOLUTION.

Que le nombre 40 des ſacs de bled de l'alliage ſoit exprimé par . . . . . *a.*

Le prix total 200 liv. de cet alliage, par . . *b.*

Le prix 9 liv. du bled le plus cher, par . . *c.*

Le nombre des ſacs du bled à 9 liv. qui doivent entrer dans l'alliage, par . . . . . *x.*

Le prix 4 liv. du bled le moins cher, par . . *d.*

Le nombre des ſacs du bled à 4 liv. qui doivent entrer dans l'alliage, par . . . . . *y.*

On aura pour le prix total du nombre des ſacs du bled à 9 liv. qui doivent entrer dans l'alliage, *cx.*

Car *x* exprimant le nombre des ſacs du bled à 9 liv. & *c* le prix de chaque ſac, il eſt évident que le prix total des ſacs du bled à 9 liv. qui doivent entrer dans l'alliage, ſera exprimé par le produit *cx* de ces deux nombres.

On aura de même pour le prix total du nombre des ſacs du bled à 4 liv. qui doivent entrer dans l'alliage, *dy.*

Mais le nombre x des ſacs du bled à 9 liv. & le nombre y des ſacs du bled à 4 liv. qui doivent entrer dans l'alliage, doivent faire enſemble, par les conditions du problême, le nombre 40 ſacs que l'on a déſigné par a.

L'autre condition du problême eſt que le prix cx du nombre des ſacs du bled à 9 liv. & le prix dy du nombre des ſacs du bled à 4 liv. doivent faire enſemble un prix total $= 200$ liv. que l'on a déſigné par b.

Les équations du problême ſeront donc en employant les dénominations de ci-deſſus.

Premieres Equations.

$$x + y = a$$
$$cx + dy = b.$$

Pour parvenir, par le moyen de ces premieres équations, à deux autres équations dans leſquelles les inconnues x & y ſoient dégagées, on opérera comme dans le problême précédent.

On tirera d'abord la valeur de x dans chacune de ces premieres équations, & l'on mettra une de ces valeurs à part. On tirera :

De la premiere, $x = a - y$ (221) Equation miſe à part, $\left\{ x = a - y. \right.$

De la ſeconde, $x = \frac{b - dy}{c}$ (228).

Enſuite on comparera enſemble les deux valeurs de x.

Et l'on aura la nouvelle équation $\frac{b - dy}{c} = a - y$.

Pour dégager l'inconnue y dans cette nouvelle équation, on multipliera d'abord chaque membre par le dénominateur c, pour enlever le dénominateur (223). Ce qui donnera . . . . . $b - dy = ac - cy$.

On tranſpoſera le terme b, & le terme $-cy$, parce que cy eſt plus grand que dy, c étant plus grand que d, & l'on aura . . . $cy - dy = ac - b$.

Enfin l'on diviſera chaque membre de cette derniere équation par le multiplicateur $c - d$ de l'inconnue (226), & l'on aura l'équation réſolue $y = \frac{ac-b}{c-d}$.

Reprenant à préſent l'équation miſe à part $x = a - y$, on mettra à la place de $-y$ ſa valeur retranchée, c'eſt-à-dire, $-\frac{ac+b}{c-d}$, & l'on aura $x = a - \frac{ac+b}{c-d}$; ce qui fera, en changeant l'entier a en la fraction $\frac{ac-ad}{c-d}$ . . . . . $x = \frac{ac-ad-ac+b}{c-d}$,

& en réduiſant . . . . . $x = \frac{b-ad}{c-d}$,

& le problême eſt tout réſolu; car ſi dans les équations . . . . . $\begin{cases} x = \frac{b-ad}{c-d} \\ y = \frac{ac-b}{c-d} \end{cases}$,

on met à la place des lettres a, b, c, d leurs valeurs dans les mêmes circonſtances où ces lettres ſe trouvent, on aura :

$$x = \frac{200 - 4 \times 40}{9 - 4} = \frac{200 - 160}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$y = \frac{9 \times 40 - 200}{9 - 4} = \frac{360 - 200}{5} = \frac{160}{5} = 32.$$

Ce qui montre que pour compoſer 40 ſacs de bled qui valent enſemble 200 liv. avec du bled à 9 liv. & du bled à 4 liv. le ſac, il faut prendre 8 ſacs du bled à 9 liv. & 32 ſacs du bled à 4 liv.

Ce qui remplit évidemment les conditions du problême.

Car, 1°. 8 ſacs du bled à 9 liv. & 32 ſacs du bled

à 4 liv. font enſemble le nombre 40 des ſacs du mêlange.

2°. Si l'on ajoute enſemble le prix total 72 liv. des 8 ſacs du bled à 9 liv. & le prix 128 liv. des 32 ſacs de bled à 4 liv. on trouvera le prix total 200 liv. du mêlange.

REMARQUE I.

250. *Comme les équations* . . . $\begin{cases} x = \frac{b - ad}{c - d} \\ y = \frac{ac - b}{c - d} \end{cases}$, *auxquelles on a été conduit dans l'exemple ci-deſſus, ſont générales, elles font connoître ce qu'il faudra faire toutes les fois que l'on propoſera de compoſer un alliage d'un nombre* a *d'unités, & d'une valeur totale* b *déterminés, avec deux eſpeces d'unités de chacune deſquelles la valeur* c, d *ſera donnée; la premiere de ces équations montre le nombre* x *qu'il faudra prendre des unités de l'eſpece de la plus grande valeur* c, *& la ſeconde détermine la quantité* y *qu'il faudra prendre des unités de l'eſpece de la moindre valeur* d.

Mais dans la premiere équation $x = \frac{b - ad}{c - d}$, *l'expreſſion* $\frac{b - ad}{c - d}$ *du nombre* x *des unités de l'eſpece de la plus grande valeur, qui doivent entrer dans l'alliage, eſt une fraction dont le numérateur eſt la différence* $b - ad$ *de la valeur totale* b *de l'alliage au produit* ad *fait de la multiplication de la valeur* d *de la moindre des deux eſpeces d'unités propoſées par le nombre total* a *des unités de l'alliage, & dont le dénominateur* $c - d$ *eſt la différence des valeurs* c & d *des deux eſpeces d'unités propoſées.*

Dans la ſeconde équation $y = \frac{ac - b}{c - d}$, *l'expreſſion*

$\frac{ac-b}{c-d}$ *du nombre* y *des unités de l'eſpece de la moindre valeur qui doivent entrer dans l'alliage, eſt une fraction qui a encore pour dénominateur la différence* $c-d$ *des valeurs des deux eſpeces d'unités propoſées, & dont le numérateur* $ac-b$ *eſt l'excès du produit fait de la multiplication de la valeur* c *de l'unité qui vaut le plus par le nombre total* a *de l'alliage ſur la valeur totale* b *de l'alliage.*

Donc toutes les fois que l'on propoſera de faire un alliage d'une valeur totale, & d'un nombre d'unités déterminées avec deux eſpeces d'unités, de chacune deſquelles la valeur ſera donnée; on déterminera la quantité d'unités qu'il faudra prendre de chacune de ces deux eſpeces, par cette méthode générale.

1°. Si l'on veut connoître d'abord le nombre des unités de l'eſpece de la moindre valeur, qui doivent entrer dans l'alliage, pour en conclure enſuite le nombre des unités de l'eſpece de la plus grande valeur, qui doivent auſſi entrer dans l'alliage, on multipliera la plus grande valeur par le nombre des unités de l'alliage, & l'on retranchera de ce produit la valeur totale de l'alliage; enſuite on diviſera le reſte de cette ſouſtraction par la différence des valeurs des deux eſpeces d'unités propoſées, & le quotient de cette diviſion ſera le nombre des unités de la moindre eſpece, qui doivent entrer dans l'alliage.

Que ſi l'on veut connoître d'abord le nombre des unités de l'eſpece de la plus grande valeur, qui doivent entrer dans l'alliage, on multipliera par le nombre des unités de l'alliage la valeur de l'unité de la moindre eſpece, & l'on retranchera le produit de la valeur totale de l'alliage; enſuite on diviſera le reſte de cette ſouſtraction par la différence des valeurs des deux eſpeces d'unités propoſées, & le quotient de

cette diviſion ſera le nombre des unités de l'eſpece de la plus grande valeur, qui doivent entrer dans l'alliage.

EXEMPLE.

Une perſonne a joué vingt parties, les unes à 10 *liv. chacune, & les autres à* 3 *liv. chacune, elle a perdu toutes celles de* 3 *liv. elle a gagné toutes celles de* 10 *liv. & le réſultat de ſon jeu eſt un gain de* 31 *liv. connoître le nombre des parties de* 3 *liv. chacune, & celui des parties de* 10 *liv. qui ont été jouées.*

On regardera les parties jouées comme des unités, & le gain de 10 liv. & la perte de 3 liv. comme des valeurs différentes de ces unités; la queſtion ſe réduira à faire un alliage de 20 unités, dont la valeur totale ſoit de 31 liv. avec deux ſortes d'unités; à ſavoir, des gains de 10 liv. & des pertes de 3 liv. chacune.

Or, pour faire cet alliage, voici comme on opérera en ſuivant la regle générale que l'on vient de donner.

1°. On multipliera le gain de 10 liv. par 20, le nombre total des parties jouées, & du produit 200 liv. on retranchera 31 liv. le réſultat du jeu, c'eſt-à-dire, la valeur totale de l'alliage, ce qui donnera un reſte de 169 liv.

2°. La différence d'un gain de 10 liv. à une perte de 3 liv. c'eſt-à-dire, de 10 à —3 étant $10+3=13$, on diviſera par 13 le reſte 169 liv. que l'on a trouvé, & le quotient 13 ſera le nombre des parties perdues de 3 liv. chacune; & ſi on retranche 13 de 20, le reſte 7 fera connoître qu'il y a ſept parties gagnées à 10 liv. chacune.

Ce qui remplit les conditions du problême : car, 1°. ſept parties gagnées, & treize parties perdues, font

enſemble les vingt parties que l'on ſuppoſe avoir été jouées.

2°. Sept parties gagnées à 10 liv. chacune, font enſemble 70 liv. & treize parties perdues à 3 liv. chacune, font enſemble — 39 liv. Or 70 — 39 = 31; ce qui eſt le réſultat du jeu tel qu'on l'a ſuppoſé.

REMARQUE II.

251. *On rapportera au problême V.* (n°. 249) *tous les alliages de plus de deux choſes différentes, lorſque les conditions du problême réduiront toutes les ſortes d'unités qu'il faut allier, à deux eſpeces ſeulement.*

Par exemple, *ſi l'on propoſe de faire* 40 *ſacs de bled dont le prix total ſoit de* 450 *liv. avec du bled à* 15 *liv. à* 12 *liv. & à* 9 *liv. le ſac, & que l'on veuille qu'il entre dans l'alliage deux fois autant de ſacs du bled à* 9 *liv. que de celui à* 12 *liv.*

Comme deux ſacs de bled à 9 liv. compoſent avec un ſac de bled à 12 liv. un alliage de trois ſacs, qui vaut en tout 30 liv. & dont par conſéquent chaque ſac vaut 10 liv. il eſt évident, 1°. que la queſtion ſe réduira à faire d'abord 40 ſacs de bled dont le prix total ſoit de 450 liv. avec du bled à 15 liv. & du bled à 10 liv. le ſac.

On trouvera, en employant la méthode générale, que l'on a donné dans la remarque précédente qu'il doit entrer dans l'alliage propoſé 10 ſacs de bled à 15 liv. & 30 ſacs de bled à 10 liv. le ſac.

2°. Comme les 30 ſacs de bled à 10 liv. doivent être compoſés de deux fois autant de bled à 9 liv. le ſac, que de celui à 12 liv. il faudra diviſer le nombre 30 en deux parties, dont l'une ſoit double de l'autre.

Pour faire cette diviſion, on nommera x le nombre des ſacs du bled à 12 livres, $2x$ ſera le nom-

bre des ſacs du bled à 9 livres, & l'on fera cette équation . . . . . $\begin{cases} x + 2x = 30 \\ \text{ou} \\ 3x = 30, \end{cases}$
laquelle ſe réduit à . . . . . $x = \frac{30}{3} = 10$,
en diviſant chaque membre par le multiplicateur 3 de l'inconnue.

Ce qui montre qu'il doit entrer dans l'alliage propoſé 10 ſacs du bled à 12 liv. & par conſéquent 20 ſacs à 9 liv. Ainſi les trois parties de l'alliage propoſé ſeront . . . . . $\begin{cases} 10 \\ 10 \text{ ſacs du bled} \\ 20 \end{cases} \begin{cases} \text{à } 15 \text{ liv.} \\ \text{à } 12 \text{ liv.} \\ \text{à } 9 \text{ liv.} \end{cases}$

On fera de la même façon un alliage d'un nombre d'unités & d'une valeur totale déterminés, avec tant de ſortes d'unités que l'on voudra, lorſque les conditions du problême réduiront toutes les eſpeces d'unités qu'il faudra allier, à deux ſeulement.

252. Que ſi les eſpeces d'unités qu'il faut allier ſe réduiſent, par les conditions du problême, à deux eſpeces d'unités telles que le produit fait de la multiplication de la valeur de la moindre de ces deux eſpeces d'unités par le nombre des unités de l'alliage, ne ſoit pas plus petit que la valeur totale de l'alliage; ou telles que le produit fait de la multiplication de l'eſpece qui vaut le plus par le nombre des unités de l'alliage ne ſoit pas plus grand que la valeur totale de l'alliage, le problême ſera impoſſible dans ces deux cas.

Par exemple, ſi l'on propoſoit de faire 40 ſacs de bled, dont le prix total fût de 400 liv. avec du bled à 15 liv. à 12 liv. & à 9 liv. le ſac, & que l'on voulût qu'il entrât dans l'alliage deux fois autant de bled à 15 liv. que de celui à 9 liv.

Comme deux ſacs du bled à 15 liv. avec un ſac du

bled à 9 liv. compoſent un alliage de trois ſacs, dont le prix total eſt de 39 liv. & dont chaque ſac vaut par conſéquent 13, le problême ſe réduiroit à faire 40 ſacs de bled dont le prix total fût de 400 liv. avec du bled à 12 liv. & du bled à 13 liv. le ſac; ce qui eſt évidemment impoſſible, puiſque 40 ſacs du bled au plus bas de ces deux prix, c'eſt-à-dire, à 12 liv. vaudroient enſemble plus que le prix total 400 liv.

De même ſi l'on propoſoit de faire 40 ſacs de bled, dont le prix total fût de 400 liv. avec du bled à 15 liv. à 9 liv. & à 8 liv. & que l'on voulût qu'il entrât dans l'alliage cinq fois autant de bled à 9 liv. que de celui à 15 liv.

Comme cinq ſacs du bled à 9 liv. compoſent avec un ſac du bled à 15 liv. un alliage de ſix ſacs dont le prix total eſt de 60 liv. & dont chaque ſac vaut par conſéquent 10 liv. la queſtion ſe réduiroit à compoſer 40 ſacs de bled dont le prix total fût de 400 liv. avec du bled à 9 liv. & du bled à 10 liv. le ſac; ce qui eſt évidemment impoſſible, puiſque la valeur totale de 40 ſacs du bled au plus haut de ces deux prix, c'eſt-à-dire, à 10 liv. ne vaut pas plus que le prix total 400 liv.

253. Que ſi le problême ne renferme point de conditions qui réduiſent toutes les choſes qu'il faut allier à deux eſpeces ſeulement, & qu'il ſoit libre d'employer indifféremment des fractions ou des entiers, le problême aura une infinité de ſolutions, c'eſt-à-dire, autant de ſolutions qu'il y aura de façons poſſibles de réduire toutes les choſes qu'il faut allier à deux eſpeces ſeulement; de façon que le produit fait de la multiplication de la valeur de la moindre de ces deux eſpeces par le nombre total des unités de l'alliage ſoit plus petit que la valeur totale de l'alliage, & que le produit fait de la multiplication de

la valeur de celle de ces deux eſpeces, qui vaudra le plus, par le nombre des unités de l'alliage, ſoit plus grand que la valeur totale de l'alliage.

PROBLÊME VI.

254. *Connoître trois grandeurs* x, y, z, *qui ſoient telles :*

1°. *Que la différence* x + y — z *de la ſomme des deux premieres à la troiſieme, ſoit égale à une grandeur connue déſignée par* a.

2°. *Que la différence* x + z — y *de la ſomme de la premiere, & de la troiſieme à la ſeconde, ſoit égale à une grandeur connue & déſignée par* b.

3°. *Que la différence* y + z — x *de la ſomme des deux dernieres à la premiere ſoit égale à une grandeur connue, & déſignée par* c.

SOLUTION.

Les équations du problême ſeront évidemment . . . . . Premieres Equations.
$$\begin{cases} x+y-z=a \\ x+z-y=b \\ y+z-x=c. \end{cases}$$

Pour parvenir, par le moyen de ces premieres équations, à trois nouvelles équations dans leſquelles les inconnues x, y, z, ſoient dégagées, on opérera comme il ſuit :

1°. L'on tirera la valeur de x dans chacune de ces trois premieres équations (221), & l'on mettra une de ces valeurs à part ; on tirera,

Valeurs de x.

De la premiére $x=a+z-y$ Equation miſe à part.
De la ſeconde $x=b+y-z$ $\{x=a+z-y.$
De la troiſieme $x=y+z-c.$

On comparera enſemble ces trois valeurs de x, la premiere

premiere avec la ſeconde, avec la troiſieme, & l'on

Secondes Equations. Secondes Equations abrégées.

aura : $\begin{cases} a+z-y=b+y-z \\ a+z-y=y+z-c \end{cases}$ $\begin{cases} 2y-2z=a-b \\ 2y\ldots=a+c. \end{cases}$

2°. On tirera dans les ſecondes équations abrégées la valeur de l'inconnue y, & l'on mettra une de ces valeurs à part. On tirera (221, 228) :

Valeurs de y.

De la premiere $y=\frac{a-b}{2}+z$

De la ſeconde $y=\frac{a+c}{2}$

Equation miſe à part. $\begin{cases} y=\frac{a+c}{2}. \end{cases}$

On comparera enſemble ces deux valeurs de y, & l'on aura . . . . . $\frac{a-b}{2}+z=\frac{a+c}{2}$; ce qui deviendra en tranſpoſant $\frac{a-b}{2}$, $z=\frac{a+c}{2}-\frac{a+b}{2}$, & ſe réduira à . . . . . $z=\frac{b+c}{2}$.

3°. On reprendra l'équation miſe à part $x=a+z-y$, & l'on mettra à la place de z ſa valeur telle qu'on la trouve, & à la place de y ſa valeur retranchée ; ce qui donnera l'équation $x=a+\frac{c}{2}+\frac{b}{2}-\frac{a}{2}-\frac{c}{2}$, laquelle deviendra . . . . . $x=\frac{a+b}{2}$, en changeant d'abord l'entier a en la fraction $\frac{2a}{2}$, & en réduiſant enſuite.

Les équations qui renferment les inconnues toutes dégagées ſont donc . . $\begin{cases} x=\frac{a+b}{2} \\ y=\frac{a+c}{2} \\ z=\frac{b+c}{2}. \end{cases}$

On appliquera cette ſolution générale à la queſtion ſuivante.

APPLICATION.

255. *De trois ſources qui coulent chacune uniformément, la premiere & la ſeconde donnent enſemble dans une heure* 40 *pintes plus que la troiſieme.*

La premiere & la troiſieme donnent enſemble 21 *pintes plus que la ſeconde.*

La ſeconde & la troiſieme donnent enſemble 32 *pintes plus que la premiere.*

Connoître le nombre des pintes de chaque ſource dans une heure.

La dépenſe de la premiere ſource pendant une heure étant exprimée par . . . . . x.

Celle de la ſeconde ſource dans le même tems, par y.

Celle de la troiſieme dans le même tems, par z.

Les 40 pintes que donnent enſemble dans une heure la premiere & la ſeconde ſource de plus que la troiſieme, par . . . . . a.

Les 21 pintes que donnent enſemble dans une heure la premiere & la troiſieme ſource de plus que la ſeconde, par . . . . . b.

Les 32 pintes que donnent enſemble dans une heure la ſeconde & la troiſieme ſource de plus que la premiere, par . . . . . c,

les équations du problême ſeront les mêmes que celles du problême général ci-deſſus; à ſavoir,

$$x+y-z=a$$
$$x+z-y=b$$
$$y+z-x=c.$$

En opérant ſur ces équations comme l'on a fait (n°. 236), on arrivera encore aux équations réſolues:

$$x=\frac{a+b}{2}$$
$$y=\frac{a+c}{2}$$
$$z=\frac{b+c}{2}.$$

Et en mettant à la place des lettres a, b, c leurs valeurs 40, 21, 32, on aura :

$$x = \frac{40+21}{2} = \frac{61}{2} = 30 + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{40+32}{2} = \frac{72}{2} = 36$$

$$z = \frac{21+32}{2} = \frac{53}{2} = 26 + \frac{1}{2}.$$

C'eſt-à-dire, que les trois ſources auront donné dans une heure : la premiere 30 pintes $+\frac{1}{2}$, la ſeconde 36, la troiſieme 26 $+\frac{1}{2}$.

Ce qui remplit évidemment les conditions du problême ; car en faiſant la ſomme de la premiere & de la ſeconde dépenſe, & en retranchant de cette ſomme la troiſieme dépenſe, on aura un reſte de 40 pintes. Ce que l'on a 1°. ſuppoſé.

En faiſant la ſomme de la premiere & de la troiſieme dépenſe, & en retranchant de cette ſomme la ſeconde dépenſe, on aura un reſte de 21 pintes. Ce que l'on a 2°. ſuppoſé.

En faiſant enfin la ſomme de la ſeconde & de la troiſieme dépenſe, & en retranchant de cette ſomme la premiere dépenſe, on aura un reſte de 32 pintes. Ce que l'on a 3°. ſuppoſé.

Problêmes du ſecond degré.

PROBLÊME I.

256. *Trouver une grandeur qui ſoit telle qu'en la multipliant par une grandeur connue, & en retranchant le produit du quarré de cette inconnue, le reſte ſoit égal à une quantité donnée.*

C'eſt-à-dire, en général, trouver la valeur de l'inconnue x *dans l'équation* $x^2 - xb = a$.

SOLUTION.

Cette équation étant du ſecond degré, on appliquera, pour la réſoudre, la regle renfermée dans les propoſitions (n°. 239, 240) touchant les équations du ſecond degré.

C'eſt-à-dire, que l'on ajoutera d'abord à chaque membre le quarré $\frac{b^2}{4}$ de la moitié du coefficient de l'inconnue, pour faire le premier membre un quarré parfait; ce qui donnera l'équation $x^2 - xb + \frac{b^2}{4} = a + \frac{b^2}{4}$.

On extraira enſuite la racine quarrée de chaque membre de cette nouvelle équation, & il viendra . . . . . $x = \frac{b}{2} = \pm\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}$.

Ce qui ſe réduira, en tranſpoſant $-\frac{b}{2}$, à l'équation . . . . . $x = +\frac{b}{2} \pm \sqrt{a + \frac{b^2}{4}}$, laquelle donne une double valeur en quantités toutes connues.

On appliquera cette ſolution générale à la queſtion ſuivante.

APPLICATION.

Connoître l'état d'une perſonne qui dit que ſi du quarré du nombre d'écus qu'elle poſſede ou qu'elle doit, on retranche le produit fait de la multiplication de ce nombre d'écus par 8, *il reſtera* 20.

Que le nombre inconnu d'écus ſoit exprimé par x.

Le multiplicateur 8 de ce nombre inconnu par b.

On aura pour le quarré de l'inconnue . . . x^2.

Et pour le produit de cette inconnue multipliée par 8 . . . . . bx.

Qu'enfin le nombre 20 qui reſte lorſque du quarré

x^2 de l'inconnue, on retranche le produit xb, c'eſt-à-dire, le produit de cette inconnue multipliée par 8, ſoit exprimé par . . . . . a.

L'équation de cette queſtion ſera le même que celle du problême général; à ſavoir . . . $x^2 - xb = a$.

L'équation réſolue ſera encore $x = +\frac{b}{2} \pm \sqrt{a + \frac{b^2}{4}}$; & en mettant dans cette équation, à la place des lettres a & b, leurs valeurs dans les mêmes circonſtances dans leſquelles ces lettres ſe trouvent, on aura :

$$x = \frac{8}{2} \pm \sqrt{20 + \frac{64}{4}},$$

ce qui ſe réduira d'abord à . . $x = 4 \pm \sqrt{36}$, & enfin à . . . . $x = 4 \pm 6 = 10$ ou $= -2$.

Ce qui fait connoître que l'état de cette perſonne eſt ou plus 10 écus, ou moins 2 écus; c'eſt-à-dire, que cette perſonne peut ou poſſéder 10 écus, ou devoir 2 écus; car ces deux nombres 10 & -2, rempliſſent également les conditions du problême.

Que l'on faſſe en effet le quarré de 10, ce qui donnera 100; que l'on multiplie 10 par 8, ce qui produira 80, & que l'on retranche 80 de 100, il reſtera 20, ce qui eſt la condition du problême.

Que l'on faſſe de même le quarré de -2 qui eſt 4; que l'on multiplie -2 par 8, ce qui produira -16, & que l'on retranche -16 du quarré 4, la différence ſera $4 + 16 = 20$, ce qui eſt encore la condition du problême.

REMARQUE.

257. *On obſervera* 1°. *que lorſque la valeur de l'inconnue devient négative, cela ſignifie que cette inconnue doit être priſe en un ſens contraire à celui ſuivant lequel on l'avoit employé en mettant le problême en équation.*

Par exemple, dans la queſtion ci-deſſus on a conſtruit l'équation $x^2 - xb = a$, en regardant x comme un bien, puiſque l'on a fait poſitif le produit xb de l'inconnue multipliée par le nombre 8 déſigné par b, & la ſouſtraction de ce produit a donné $-xb$.

Et en ſe ſervant de la valeur négative -2, x eſt regardée dès-lors comme négative; le produit de cette inconnue, multipliée par le nombre 8, devient $-xb$, ou -16, & la ſouſtraction de ce produit donne $+16$.

2°. *La valeur négative de l'inconnue ne doit être regardée comme une véritable ſolution, que lorſque l'inconnue peut être priſe dans un ſens contraire à celui ſelon lequel on l'avoit priſe en mettant le problême en équation; c'eſt-à-dire, lorſqu'elle peut être regardée comme une grandeur négative, ce qui eſt arrivé dans la queſtion précédente, mais ce qui n'a pas toujours lieu.*

Par exemple, ſi l'on propoſoit de déterminer le nombre de perſonnes qui compoſent une aſſemblée en ſuppoſant qu'il reſte 20, lorſque du quarré de ce nombre inconnu de perſonnes, on retranche le produit de ce nombre inconnu multiplié par 8, l'équation de ce problême donneroit comme ci-deſſus $\begin{cases} x = 10 \\ \text{ou} \\ x = -2; \end{cases}$ mais il eſt évident que l'on ne pourroit propoſer pour la véritable ſolution que le nombre 10, & nullement le nombre -2 : car une aſſemblée ne peut être compoſée de -2 perſonnes.

PROBLÊME II.

258. *Trouver une grandeur qui ſoit telle qu'en la multipliant par une quantité connue, & en ajoutant ce produit au quarré de cette inconnue, la ſomme ſoit égale à une quantité donnée.*

C'eſt-à-dire, en général, trouver la valeur de l'inconnue x *dans l'équation* $x^2 + xb = a$.

SOLUTION.

On ajoutera d'abord à chaque membre de cette équation le quarré $\frac{b^2}{4}$ de la moitié du coefficient de l'inconnue x, pour faire le premier membre un quarré parfait (n°. 236), cette addition donnera l'équation . . . . . $x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = a + \frac{b^2}{4}$, laquelle ſe réduira par l'extraction de la racine quarrée à . . . . . $x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}$, & par la tranſpoſition de $\frac{b}{2}$ à $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{a + \frac{b^2}{4}}$; ce qui donne une double valeur de x en quantités toutes connues.

On appliquera cette ſolution générale à la queſtion ſuivante.

APPLICATION.

Connoître l'état d'une perſonne qui dit que ſi au quarré du nombre d'écus qu'elle a ou qu'elle doit, on ajoute le produit fait de la multiplication de ce nombre d'écus par le nombre 8, *la ſomme ſera* 20.

Que le nombre inconnu d'écus ſoit exprimé par x.

Le multiplicateur 8 de ce nombre inconnu par b.

Le quarré de l'inconnu ſera . . . . . x^2.

Le produit de l'inconnue multipliée par 8, ſera bx.

Qu'enfin le nombre 20 qui vient, en ajoutant au quarré x^2 de l'inconnue le produit de cette inconnue multipliée par 8, ſoit déſigné par . . . a.

L'équation de cette queſtion ſera la même que celle

du problême général ; à ſavoir, $x^2 + bx = a$.

L'équation réſolue ſera encore $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{a + \frac{b^2}{4}}$,

& en mettant dans cette équation, à la place des lettres a, b leurs valeurs dans les mêmes circonſtances dans leſquelles ces lettres ſe trouvent, on aura :

$$x = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{20 + \frac{64}{4}};$$

ce qui ſe réduira d'abord à . . . $x = -4 \pm \sqrt{36}$, & enſuite à . . . $x = -4 \pm 6 = 2$ ou $= -10$.

Ce qui fait connoître que l'état de cette perſonne eſt ou $+2$ écus, ou -10 écus ; c'eſt-à-dire, que cette perſonne peut devoir 10 écus ou en poſſéder 2 : car les nombres -10, & $+2$, rempliſſent également les conditions du problême.

Que l'on faſſe en effet le quarré de -10, ce qui donnera 100 ; que l'on multiplie -10 par 8, ce qui donnera -80 ; que l'on ajoute enſuite -80 à 100, la ſomme ſera $100 - 80 = 20$, ce qui eſt la condition du problême.

Que l'on faſſe de même le quarré de 2, ce qui donnera 4 ; que l'on multiplie 2 par 8, ce qui produira 16 ; que l'on ajoute enſuite 4 à 16, la ſomme ſera $4 + 16 = 20$.

PROBLÊME III.

260. *Le produit de deux grandeurs & leur ſomme étant données, connoître les grandeurs ; c'eſt-à-dire, en général, connoître les inconnues* x, y *par le moyen des équations* . . . . . $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b, \end{cases}$

dans leſquelles a *déſigne la ſomme connue des grandeurs* x, y ; *&* b *déſigne la valeur du produit* xy *de ces grandeurs.*

SOLUTION.

On tirera d'abord la valeur de x dans chacune des équations propoſées. On tirera :

De la premiere $x = a - y$,

De la ſeconde $x = \frac{b}{y}$.

Enſuite on comparera ces deux valeurs de x, & l'on aura la nouvelle équation . . . $a - y = \frac{b}{y}$.

Pour dégager l'inconnue y dans cette nouvelle équation, on multipliera chaque membre par le dénominateur y; ce qui donnera l'équation $ay - y^2 = b$, laquelle étant du ſecond degré, on appliquera les regles relatives à cette ſorte d'équation; c'eſt-à-dire, que l'on tranſpoſera d'abord b, & $ay - y^2$, pour rendre poſitive y^2; & il viendra . . $\begin{cases} -b = y^2 - ay, \\ \text{ou} \\ y^2 - ay = -b. \end{cases}$

On ajoutera enſuite à chaque membre dans cette nouvelle équation, le quarré $\frac{a^2}{4}$ de la moitié du coefficient a de l'inconnue, pour faire le premier membre un quarré parfait (n°. 218), & l'on aura :

$$y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = -b + \frac{a^2}{4};$$

ce qui ſe réduira, par l'extraction de la racine quarrée, à . . . . . $y - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-b + \frac{a^2}{4}}$,

& enſuite par la tranſpoſition de $-\frac{a}{2}$ à . . . $y = +\frac{a}{2} \pm \sqrt{-b + \frac{a^2}{4}}$.

APPLICATION.

Si on ſuppoſe, par exemple, que la ſomme a des gran-

deurs x, y *ſoit égale à* 16, *& que* 60 *ſoit la valeur* b *du produit* xy *de ces deux grandeurs, & que dans l'équation* $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$, *on mette les valeurs des lettres* a, b *dans les mêmes circonſtances dans leſquelles ces lettres ſe trouvent,*

il viendra . . . . . $y = \frac{16}{2} \pm \sqrt{\frac{256}{4} - 60}$;

ce qui ſe réduira d'abord à $y = 8 \pm \sqrt{4}$,

enſuite à . . . . . $y = 8 \pm 2 = 10$, ou $= 6$.

Ce qui montre que l'un y des nombres cherchés peut être également ou $+10$, ou $+6$, & par conſéquent x ſera ou $16 - 10$, ou $16 - 6$, c'eſt-à-dire, ou 6, ou 10.

Et en général le plus grand des deux nombres inconnus x, y ſera 10, & l'autre ſera 6, ce qui remplit évidemment les conditions du problême; car la ſomme . . . . . $10 + 6 = 16$,

ainſi on aura . . . . . $x + y = 16$;

ce que l'on a d'abord ſuppoſé: de plus $10 \times 6 = 60$,

ainſi on aura . . . . . $xy = 60$:

ce que l'on a ſecondement ſuppoſé.

REMARQUE.

261. *Souvent, pour éviter des calculs longs & embarraſſans dans la ſolution d'un problême, on ne cherche pas directement les valeurs des inconnues demandées, mais on s'applique à connoître d'autres quantités par le moyen deſquelles on peut découvrir les inconnues demandées.*

Par exemple, lorſque l'on propoſe de connoître deux grandeurs dont la ſomme & le produit ſont donnés: comme l'on eſt prévenu que la plus grande de deux quantités inégales eſt égale à la moitié de la ſomme de ces deux

grandeurs, plus à la demi-différence de ces grandeurs, & que la plus petite eſt égale à la moitié de la ſomme moins la demi-différence de ces mêmes grandeurs, on peut, connoiſſant déja la ſomme, & par conſéquent la demi-ſomme des grandeurs demandées, chercher leur demi-différence, pour conclure par le moyen de cette demi-ſomme & de cette demi-différence, la valeur de chacune des grandeurs demandées; & cette demi-différence peut ſe découvrir aiſément par les données du problême, c'eſt-à-dire, par le moyen de la ſomme connue & du produit connu de ces deux grandeurs.

Pour faire uſage de cette méthode on ſe rappellera que le produit de deux grandeurs eſt égal au quarré de la moitié de la ſomme de ces deux grandeurs moins le quarré de leur demi-différence (n°. 165).

Ainſi la demi-ſomme des grandeurs demandées x, y, étant déſignée par . . . . . a.
Leur produit, par . . . . . b.
Leur demi-différence, par . . . . . z.
Le quarré de la demi-ſomme ſera . . . . a^2.
Le quarré de la demi-différence . . . . z^2.

Et l'expreſſion du produit xy en parties relatives à la demi-ſomme, & à la demi-différence, ſera $a^2 - z^2$, & comme on ſuppoſe . . . . . $xy = b$, on aura l'équation . . . . . $b = a^2 - z^2$, laquelle deviendra, par la tranſpoſition de z^2 & de b . . . . . $z^2 = a^2 - b$, & par l'extraction de la racine quarrée $z = \pm \sqrt{a^2 - b}$; ce qui donne une double valeur de z en quantités connues.

Enſorte que ſi l'on ſuppoſe la demi-ſomme $a = 8$, & le produit $b = 60$, & que l'on mette dans cette double valeur de z le quarré de 8 à la place de a^2, & -60 à la place de $-b$, on trouvera :

$$z = \pm \sqrt{64 - 60} = \pm \sqrt{4} = \pm 2.$$

Et cette demi-différence étant donnée, on aura le plus grand des deux nombres x, y, en ajoutant à la demi-ſomme 8 la valeur poſitive $+2$ de la demi-différence 2, c'eſt-à-dire, le plus grand des deux nombres demandés ſera 10.

Et l'on aura le plus petit des nombres cherchés, en ajoutant à leur demi-ſomme 8 la valeur négative -2 de la demi-différence 2; c'eſt-à-dire, qu'il ſera égal à $8-2=6$.

Et comme rien ne détermine à faire x plus grand ou plus petit que y, on pourra faire $x=10$, & $y=6$, ou $x=6$, & $y=10$.

Cette méthode dans laquelle on ne s'applique pas à la recherche directe des grandeurs demandées, mais dans laquelle on cherche celles qui ſont connoître les grandeurs demandées, ſera encore employée dans le problême ſuivant.

PROBLÊME IV.

262. *La ſomme de deux grandeurs* x, y *étant donnée avec la ſomme de leurs quarrés, connoître ces grandeurs.*

SOLUTION.

La ſomme des grandeurs étant connue, on cherchera d'abord à connoître leur demi-différence, pour pouvoir conclure la valeur de chacune de ces deux grandeurs par le moyen de leur demi-ſomme & de leur demi-différence.

Or, pour connoître la demi-différence des grandeurs x, y par les données du problême, c'eſt-à-dire, par le moyen de leur ſomme connue, & de la ſomme connue de leurs quarrés, il ſuffira d'exprimer le quarré de chacune de ces grandeurs en parties relatives à la demi-ſomme connue, & à la demi-différence

cherchée, & de mettre enſuite ces quarrés en équation avec leur ſomme connue.

Que la demi-différence cherchée des grandeurs x, y, ſoit exprimée par . . . . . z.

Leur demi-ſomme connue, par . . . . . a.

La ſomme de leurs quarrés, par . . . . b.

La plus grande des quantités cherchées ſera $a+z$, & ſon quarré exprimé en parties relatives à la demi-ſomme & à la demi-différence ſera (n°. 161) $a^2+2az+z^2$: la moindre des quantités cherchées ſera $a-z$, & ſon quarré exprimé en parties relatives à la demi-ſomme & à la demi-différence ſera (n°. 162) $a^2-2az+z^2$, & l'expreſſion de la ſomme des quarrés des quantités cherchées, ſera $a^2+2az+z^2+a^2-2az+z^2$, ce qui ſe réduit à $2a^2+2z^2$.

Or on ſuppoſe que les quarrés des grandeurs cherchées ſont enſemble la quantité connue b.

L'équation du problême ſera donc celle-ci du ſecond degré . . . . . $2a^2+2z^2=b$, laquelle deviendra d'abord par la tranſpoſition du terme $2a^2$ (220) : . . . . . $2z^2=b-2a^2$; enſuite en diviſant chaque membre par le multiplicateur 2 de l'inconnue . . . . . $z^2=\frac{b-2a^2}{2}$, & en extrayant la racine quarrée $z=\pm\sqrt{\frac{b}{2}-a^2}$, ce qui donne une double valeur de z en quantités toutes connues.

Et cette demi-différence z étant connue, ſi on ajoute ſa valeur poſitive $\sqrt{\frac{b}{2}-a^2}$ à la demi-ſomme a, on aura la plus grande des deux quantités x, y, & l'on aura la plus petite en ajoutant à la demi-ſomme a la valeur négative $-\sqrt{\frac{b}{2}-a^2}$ de la demi-différence z.

Et comme rien ne détermine à faire x plus grand que y, on aura indifféremment :

$$x = a + \sqrt{\tfrac{b}{2} - a^2},$$

$$y = a - \sqrt{\tfrac{b}{2} - a^2},$$

ou

$$x = a - \sqrt{\tfrac{b}{2} - a^2},$$

$$y = a + \sqrt{\tfrac{b}{2} - a^2}.$$

APPLICATION.

Si on ſuppoſe, par exemple, que la demi-ſomme a *des grandeurs* x, y *ſoit* 8 ; *que la ſomme* b *des quarrés des mêmes grandeurs* x, y *ſoit* 136, *& que l'on mette dans l'équation* $z = \pm\sqrt{\frac{b}{2} - a^2}$, *la moitié de* $136 = 68$, *à la place de* $\frac{b}{2}$, *& —64 à la place de* $-a^2$, *on trouvera* . . . $z = \pm\sqrt{68 - 64} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

C'eſt-à-dire, que la valeur poſitive de la demi-différence ſera $+2$, & ſa valeur négative ſera -2, & par conſéquent le plus grand des deux nombres cherchés, ſoit x, ſoit y, ſera $8 + 2 = 10$, en ajoutant à la demi-ſomme la demi-différence poſitive $+2$.

Et le plus petit ſera $8 - 2 = 6$, en ajoutant à la demi-ſomme 8 la demi-différence négative -2 ; & ces deux nombres 10 & 6 rempliſſent évidemment les conditions du problême : car . . . $10 + 6 = 16$, & par conſéquent l'on aura . . . $x + y = 16$; ce que l'on a 1°. ſuppoſé.

Et la ſomme de leurs quarrés $100 + 36 = 136$; ce que l'on a 2°. ſuppoſé.

SECTION II.

Les Equations des degrés ſupérieurs.

DÉFINITIONS.

263. ON dit qu'une équation eſt *ordonnée* lorſque le ſecond membre étant zero, tous les termes où ſe trouve l'inconnue ſont écrits dans le premier, ſelon l'ordre décroiſſant des expoſans des puiſſances de cette inconnue, & le terme tout connu, lorſqu'il y en a un, eſt écrit le dernier.

Par exemple, $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x - 258 = 0$, eſt une équation ordonnée.

On appelle *terme* de l'équation, les grandeurs où l'inconnue eſt élevée à différens degrés; ainſi toutes les grandeurs où l'inconnue eſt élevée au même degré, compoſent un ſeul terme; la quantité compoſée des grandeurs toutes connues eſt auſſi un terme.

La grandeur connue, complexe ou incomplexe, qui multiplie l'inconnue dans un terme, eſt appellée le *coefficient* de ce terme; lorſque le coefficient eſt une grandeur complexe, on a coutume d'écrire l'un ſous l'autre les termes qui le compoſent.

Par exemple, dans l'équation $x^3 - ax^2 - bx^2 - cx^2 + abx + acx + bcx - abc = 0$, x^3 eſt un terme; la quantité $-ax^2 - bx^2 - cx^2$ où le même degré x^2 de l'inconnue eſt multiplié par $\overline{-a-b-c}$, eſt un autre terme qui a pour coefficient le multiplicateur connu $\overline{-a-b-c}$; la quantité $abx + acx + bcx$ où le même degré x de l'inconnue eſt multiplié par $\overline{ab+ac+bc}$, eſt encore un terme qui a pour coefficient $\overline{ab+ac+bc}$; enfin la quantité toute connue $-abc$, eſt auſſi un terme.

Pour mieux diſtinguer les termes de cette équation, on l'écrit ainſi . . . . . $x^3 - ax^2 + abx - abc = 0$
$- b + ac$
$- c + bc.$

Le *premier terme* de l'équation eſt celui où ſe trouve la plus haute puiſſance de l'inconnue; le ſecond terme eſt celui où l'inconnue eſt élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt moindre d'une unité que celui de la puiſſance de l'inconnue dans le premier terme; & ainſi de ſuite juſqu'au dernier terme qui eſt une quantité toute connue.

Dans l'exemple précédent x^3 eſt le premier terme; $x^2 \times \overline{-a-b-c}$ eſt le ſecond terme; $x \times \overline{ab+ac+bc}$ eſt le troiſieme, & $-abc$ le dernier.

Lorſqu'il y a interruption dans la ſuite des puiſſances de l'inconnue, les termes qui contiennent les degrés intermédiaires qui ne ſont point dans l'équation, ſont dits *évanouis*.

Par exemple, dans $x^3 * - abx + abc = 0$, le ſecond terme eſt évanoui, & $-abx$ demeure toujours le troiſieme.

On dit qu'une équation eſt *complette*, ou qu'elle a tous ſes termes, lorſqu'étant ordonnée, les expoſans des puiſſances de l'inconnue vont de ſuite, en diminuant continuellement de l'unité, & qu'il y a de plus un terme compoſé de quantités toutes connues.

Ainſi une équation complette doit avoir un terme de plus qu'il n'y a d'unités dans l'expoſant de la plus haute puiſſance de l'inconnue: il y a trois termes dans une équation complette du ſecond degré. Il y en aura quatre dans l'équation complette du troiſieme degré; cinq dans l'équation complette du quatrieme, & ainſi de ſuite.

Une équation eſt dite du troiſieme, du quatrieme, du cinquieme, &c. degré; lorſque dans cette équation

tion la plus haute puiſſance de l'inconnue eſt un cube ou une quatrieme, ou une cinquieme, &c. puiſſance.

Lorſque dans une équation telle que $x^5 - ax^4 + abx^2 - abc = 0$, tous les degrés de l'inconnue ſont de ſuite des puiſſances exactes du moindre degré de l'inconnue qui eſt dans l'avant-dernier terme, alors le degré de l'équation ſe conte ſur celui de la plus haute puiſſance du moindre degré de l'inconnue qui eſt dans l'avant-dernier terme. Ainſi on dira que l'équation propoſée n'eſt que du troiſieme degré, la plus haute puiſſance x^6 étant le cube du moindre degré x^2.

Les équations du ſecond, du troiſieme, du quatrieme, &c. degré, ſont dites *compoſées* par oppoſition à celles du premier degré que l'on appelle équations ſimples.

On nomme *formules* les équations générales qui repréſentent toutes les équations particulieres du même degré.

On appelle *racine* d'une équation ſimple, la valeur de l'inconnue dans cette équation ſimple.

Dans l'équation ſimple $x - a = 0$, d'où l'on déduit $x = a$, la grandeur a, étant la valeur de l'inconnue x, eſt dite la racine de cette équation.

La racine d'une équation peut être *poſitive* ou *négative*, *complexe* ou *incomplexe*, *commenſurable* ou *incommenſurable*, ou *mixte*.

Dans l'équation $x - a = 0$, d'où l'on tire $x = a$, la racine eſt poſitive; dans $x + a$, d'où l'on tire $x = -a$, la racine eſt négative; elle eſt incomplexe dans ces deux cas.

Dans $x - a + b = 0$, d'où l'on tire $x = a - b$, la racine eſt complexe & commenſurable, de même que dans les deux premiers cas.

Dans $x - \sqrt{ab} = 0$, d'où l'on tire $x = \sqrt{ab}$, la

racine eſt incommenſurable, & mixte dans $x + a - \sqrt{ab} = 0$.

La racine d'une équation ſimple peut être *poſſible* ou *impoſſible*, la premiere ſe nomme encore *réelle*, & la ſeconde *imaginaire*.

Par exemple, dans $x - a = 0$, $x + a = 0$, $x - a + b = 0$, $x + a - \sqrt{ab} = 0$, $x + \sqrt[3]{-a^2 b} = 0$, toutes les racines ſont réelles.

Dans $x \pm \sqrt[m]{-a} = a$, la racine eſt imaginaire en ſuppoſant que l'expoſant du radical $\sqrt[m]{-a}$ eſt un nombre pair; car, comme l'on a vu (n°. 187), toutes les racines d'un degré pair d'une quantité négative ſont imaginaires.

Enfin la racine d'une équation ſimple peut être compoſée d'une grandeur réelle & d'une imaginaire comme dans $x - a + \sqrt{-ab} = 0$.

ARTICLE I.

La formation des équations compoſées, & les propriétés déduites de leur formation.

FORMATION DES ÉQUATIONS COMPOSÉES.

264. *Propoſition.* Toute équation compoſée peut être regardée comme le produit d'autant d'équations ſimples qu'elle a d'unités dans l'expoſant de ſon degré.

Car que l'on forme les trois équations ſimples . . . . . $\begin{cases} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ x - c = 0, \end{cases}$

& qu'on les multiplie enſemble, il viendra l'équation . . . . . $x^3 - ax^2 + abx - abc = 0$

du troiſieme degré . . . $\begin{matrix} -b \\ -c \end{matrix} \quad \begin{matrix} +ac \\ +bc. \end{matrix}$

Et en multipliant enſemble quatre équations ſimples, il viendra une équation du quatrieme degré, & une du cinquieme, ſi on multiplie cinq équations ſimples, & ainſi de ſuite.

Donc toute équation compoſée peut être regardée comme le produit d'autant d'équations ſimples qu'il y a d'unités dans l'expoſant de ſon degré.

CONSÉQUENCE.

265. On pourra donc former des équations de chaque degré, en multipliant enſemble un nombre d'équations ſimples, égal à l'expoſant du degré de l'équation; & ſi dans ces équations ſimples on exprime les valeurs de l'inconnue x par des lettres, pour les rendre générales, & que de plus on les faſſe poſitives & négatives, ſelon toutes les combinaiſons poſſibles, on pourra conſtruire pour chaque dégré un nombre déterminé de formules qui renfermeront toutes les équations particulieres de ce degré.

Les équations du ſecond degré auront trois formules; car dans les deux équations ſimples qui compoſent par leur multiplication l'équation du ſecond degré, les racines ſeront ou toutes deux poſitives, ou toutes deux négatives, ou l'une poſitive, & l'autre négative.

Les équations du troiſieme degré auront quatre formules; car dans les équations ſimples qui compoſent par leur multiplication l'équation du troiſieme degré, les trois racines peuvent être ou poſitives, ou toutes trois négatives, ou deux poſitives avec une négative, ou enfin deux négatives avec une poſitive.

En général une équation d'un degré quelconque aura toujours autant de formules, & une de plus, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de ſon degré.

Par exemple, les équations du troiſieme degré auront les quatre formules ſuivantes :

$$\begin{cases} x-a=0 \\ x-b=0 \\ x-c=0 \end{cases} \quad \text{I.} \quad \begin{matrix} x^3 - ax^2 + abx - abc = 0 \\ -b \quad +ac \\ -c \quad +bc. \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+a=0 \\ x+b=0 \\ x+c=0 \end{cases} \quad \text{II.} \quad \begin{matrix} x^3 + ax^2 + abx + abc = 0 \\ +b \quad +ac \\ +c \quad +bc. \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x-a=0 \\ x-b=0 \\ x+c=0 \end{cases} \quad \text{III.} \quad \begin{matrix} x^3 - ax^2 + abx + abc = 0 \\ -b \quad -ac \\ +c \quad -bc. \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x-a=0 \\ x+b=0 \\ x+c=0 \end{cases} \quad \text{IV.} \quad \begin{matrix} x^3 - ax^2 - abx - abc = 0 \\ +b \quad -ac \\ +c \quad +bc. \end{matrix}$$

Suppoſant que l'on ait fait de telles formules pour les équations de chaque autre degré, on pourra aiſément de ces formules & de la formation générale des équations compoſées par la multiplication des équations de moindre degré, déduire les propriétés ſuivantes.

Propriétés générales des Equations compoſées.

266. Premiere. Une équation compoſée peut être toujours diviſée par les équations du moindre degré, par la multiplication deſquelles elle a été formée.

267. Seconde. Une équation compoſée a toujours autant de racines qu'il y a d'unités dans l'expoſant de ſon degré; les racines ſont celles des équations ſimples dont elle a été formée.

268. Troiſieme. La ſomme de toutes les racines d'une équation eſt le coefficient du ſecond terme; la ſomme des produits des mêmes racines priſes deux à deux eſt le coefficient du troiſieme; la ſomme des

produits des mêmes racines priſes trois à trois, eſt le coefficient du quatrieme terme, & ainſi de ſuite, juſqu'au dernier terme qui eſt le produit de toutes les racines priſes enſemble.

269. Quatrieme. Dans le ſecond terme les racines ſont une à une, & elles ſe multiplient en nombre impair dans tous les autres termes pairs, tels que le quatrieme, le ſixieme, le huitieme, &c. dans les termes impairs; ſavoir, les troiſieme, cinquieme, ſeptieme, &c. les racines ſont multipliées en nombre pair les unes par les autres.

270. Cinquieme. Si toutes les racines ſont négatives, tous les termes de l'équation compoſée ſont affectés du ſigne +; car les racines étant négatives, elles ont le ſigne + dans les équations ſimples, dont le ſecond membre eſt zero, & par conſéquent les termes du produit de ces équations ſimples ne peuvent avoir que le ſigne +.

Si toutes les racines ſont poſitives, les termes de l'équation compoſée ont alternativement les ſignes + & —; car le premier terme étant toujours poſitif, le ſecond terme ayant pour coefficient la ſomme des racines poſitives qui ont chacune — dans les équations ſimples, doit avoir le ſigne —; le quatrieme terme & les autres termes pairs, ayant pour coefficient la ſomme des produits des racines poſitives multipliées en nombre impair, doivent auſſi avoir le ſigne —, parce que les racines poſitives ont le ſigne — dans les équations ſimples, & que — multiplié par — un nombre de fois impair produit —: au contraire le troiſieme & les autres termes impairs ayant pour coefficient la ſomme des produits des racines poſitives multipliées en nombre pair, doivent avoir le ſigne +, parce que — multiplié par —, un nombre de fois pair produit +. Ainſi lorſque les racines ſont toutes

positives, il y aura dans les termes de l'équation l'alternative des signes + & —; à savoir, + pour les termes impairs, & — pour les termes pairs.

Donc si tous les termes d'une équation n'ont pas le signe +, & si l'alternative des signes + & — n'est pas constante, il y aura nécessairement des racines positives & des négatives dans l'équation.

271. Sixieme. Si le nombre des racines positives est pair, le dernier terme est positif; s'il est impair, le dernier terme est négatif.

272. Septieme. Si le second terme d'une équation est positif, la somme des racines négatives excede celle des positives; & s'il est négatif, la somme des racines positives excede celle des négatives.

Ainsi le second terme manquera dans une équation, lorsque la somme des racines négatives sera égale à celle des racines positives, parce qu'alors le coefficient du second terme sera zero.

273. Huitieme. Lorsqu'un terme différent du dernier, manquera dans une équation, ce sera une marque évidente que toutes les racines n'ont pas le même signe: car le coefficient de ce terme n'a pu être détruit que parce qu'entre les produits dont il est composé, il s'en est trouvé de négatifs qui ont détruit les positifs; ce qui ne peut avoir lieu que lorsque les racines qui ont formé ces produits, ont différens signes.

274. Neuvieme. Lorsqu'une équation n'aura pas de dernier terme, il faudra qu'il y ait au moins une des racines égale à zero, étant évident que le produit de toutes les racines, qui forme le dernier terme, ne peut devenir nul que lorsque l'un de ses facteurs sera zero; dans ce cas l'équation se réduit à un degré moindre en la divisant par l'inconnue du dernier terme.

Par exemple, l'équation $x^3+5x^2+3x=0$ ſe réduit, en diviſant par x, à $x^2+5x+3=0$.

275. Dixieme. Si dans une équation on ſubſtitue à l'inconnue une de ſes valeurs, toute l'équation ſera réduite à zero.

Par exemple, dans l'équation $x^3-10x^2+31x-30=0$, laquelle vient de la multiplication des équations ſimples . . . . . $\begin{cases} x-2=0 \\ x-3=0 \\ x-5=0, \end{cases}$ ſi l'on met à la place de x une de ſes valeurs; par exemple 2, il viendra $8-40+62-30=0$, ou $0=0$, ce qui eſt néceſſaire; car l'équation propoſée peut s'écrire ainſi $x-2 \times x-3 \times x-5=0$.

Et ſi dans la premiere équation ſimple on met à la place de x ſa valeur 2, il viendra $2-2$ ou $0 \times x-3 \times x-5$; ce qui réduit évidemment à zero, puiſque l'un des produiſans eſt zero.

Il en ſeroit de même ſi à la place de x on ſubſtituoit celle de ſes autres valeurs que l'on voudroit.

L'inconnue d'une équation compoſée équivaut donc indiſtinctement à chacune des racines de l'équation?

Et l'on ſera ſûr d'avoir trouvé l'une des racines d'une équation, lorſqu'en ſubſtituant cette racine à l'inconnue, toute l'équation ſe réduit à zero.

276. Onzieme. Lorſque dans une équation compoſée, le premier terme aura un coefficient différent de l'unité, parmi les équations ſimples qui ont concouru à la former il y en aura au moins une dont la racine renfermera une fraction.

Car ce ne peut être qu'en enlevant dans l'équation compoſée le dénominateur de cette fraction que le premier terme aura reçu un coefficient différent de l'unité.

Par exemple, en multipliant enſemble les trois

équations simples . . . . . $\begin{cases} x-2=0 \\ x-\frac{2}{3}=0 \\ x-4=0, \end{cases}$

dont la seconde a pour racine une fraction, l'équation résultante sera $x^3-\frac{20}{3}x^2+12x-\frac{16}{3}=0$, dans laquelle le premier terme recevra le coefficient 3, si on veut multiplier par 3 pour faire disparoître les fractions qu'elle renferme, & la réduire à $3x^3-20x^2+36x-16=0$.

277. Douzieme. Lorsque le problême renfermera quelque contradiction, l'équation composée qui l'exprimera, pourra toujours être considérée comme formée de la multiplication d'autant d'équations simples qu'il y a d'unités dans l'exposant de son degré, mais parmi lesquelles quelques-unes ont des racines imaginaires.

Propriétés des Equations qui ont des racines imaginaires.

278. Pour découvrir ces propriétés, on considérera qu'un radical imaginaire tel que $\sqrt{-a}$, multiplié par un second radical imaginaire qui a la même quantité sous le signe; c'est-à-dire, par $\sqrt{-a}$, donne un produit réel $-a$.

Car multiplier le radical $\sqrt{-a}$ par lui-même, c'est évidemment délivrer la quantité $-a$ du signe radical $\sqrt{\ }$ (n°. 298), & par conséquent $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=-a$.

Il est encore sûr que $\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=+a$; car . . . . . $\begin{cases} \sqrt{-a}=1\times\sqrt{-a} \\ -\sqrt{-a}=-1\times\sqrt{-a}, \end{cases}$

par conséquent $\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=1\times\sqrt{-a}\times-1\times\sqrt{-a}$; ce qui donne, en faisant la multiplica-

tion des quantités ſous le ſigne & hors du ſigne (n°. 198), $-1 \times -a = +a$.

Le produit réel $+a$ étant multiplié de nouveau par le même radical $-\sqrt{-a}$, donnera la nouvelle imaginaire $-a\sqrt{-a}$, qui, étant multipliée par le radical $\sqrt{-a}$, donnera la grandeur réelle $-a \times -a = +ad$.

279. De-là il ſuit que des radicaux imaginaires qui ont la même quantité ſous le même ſigne radical, peuvent, par leur multiplication, former un produit réel, pourvu qu'on les multiplie deux à deux, quatre à quatre, &c. toujours en nombre pair; & ſi deux à deux ils ſont affectés l'un du ſigne $+$, & l'autre du ſigne $-$, le produit ſera non ſeulement réel, mais poſitif.

280. Que ſi l'un des termes d'un polinome eſt un radical imaginaire comme dans $y-a-\sqrt{-b}$, le ſigne radical pourra s'évanouir, pourvu que l'on multiplie ce polinome par un autre polinome qui n'en differe que par le ſigne qui précédera le radical, tel que $y-a+\sqrt{-b}$, le produit eſt en effet $y^2+2ay+a^2+b$, ou il n'y a plus de radicaux; ce qui doit être ainſi, parce qu'à cauſe des ſignes contraires les produits particuliers de chaque terme réel par $\sqrt{-b}$, ſe détruiſent, & les termes $\sqrt{-b}$, $-\sqrt{-b}$ donneront le produit réel $+b$.

De même qu'on multiplie enſemble les équations ſimples . . . . . $\begin{cases} x+\sqrt{-b}=0 \\ x-\sqrt{-b}=0, \end{cases}$ l'équation réſultante x^2+b ne contiendra aucun radical imaginaire, quoique ſes racines ſoient imaginaires.

281. On conclura de ces obſervations, que lorſqu'une équation compoſée ne renferme point de radicaux imaginaires, & qu'elle a des racines imaginaires.

1°. Elles y ſont en nombre pair, & priſes deux à deux elles ont la même quantité ſous le ſigne radical, & ne different que par les ſignes + & —.

2°. Si elle eſt d'un degré impair, elle a au moins une racine réelle.

3°. Si elle eſt d'un degré pair, & que ſon dernier terme ſoit négatif, elle a au moins deux racines réelles; & lorſqu'elle en aura plus de deux, elles y ſeront en nombre pair.

Car le dernier terme étant le produit de toutes les racines (n°. 268), comme il eſt ſuppoſé négatif, & que le produit réel, formé de ſeules imaginaires dans la multiplication des équations ſimples, eſt toujours poſitif, lorſque l'équation compoſée ne contient pas de radicaux imaginaires, il faut qu'il y ait néceſſairement quelque racine réelle qui rende le dernier terme négatif; & comme les imaginaires doivent être en nombre pair pour former un produit réel, le nombre des racines d'une équation d'un degré pair étant pair (n°. 267), il faut que les racines réelles qu'elle peut contenir, ſoit auſſi en nombre pair.

ARTICLE II.

Réduction & transformation des Equations.

282. Pour abréger & faciliter les opérations que l'on fait ſur les équations, on repréſente par une équation générale toutes les équations particulieres d'un même degré.

Par exemple, l'équation $x^3 \pm nx^2 \pm px \pm q = 0$

eſt une formule générale qui repréſente toutes les équations particulieres du troiſieme degré par les doubles ſignes $\pm$, qui affectent ſes termes par les coefficiens indéterminés n, p de ces termes, & par l'indéterminée q, qui repréſente le terme connu.

Quand on a une équation particuliere à réſoudre, on donne aux termes de la formule les mêmes ſignes qui affectent les termes correſpondans dans l'équation particuliere; & lorſque dans cette équation particuliere il manque quelques termes, ceux qui leur répondent dans la formule ſont ſuppoſés nuls ou égaux à zero. La formule générale étant ainſi changée pour l'équation particuliere propoſée, ſi dans la réſolution de cette formule on met les grandeurs de l'équation particuliere à la place des indéterminées n, p, q qui les repréſentent, on aura la réſolution de l'équation particuliere.

Par exemple, pour que la formule générale $x^3 \pm nx^2 \pm px \pm q = 0$, repréſente l'équation particuliere ſuivante : $x^3 - ax^2 + abx - abc = 0$
$-b \quad +ac$
$-c \quad +bc$,
on fera $a+b+c=n$, $ab+ac+ad=p$, $abc=q$, on donnera le ſigne $+$ au troiſieme terme, & le ſecond terme & le quatrieme auront chacun le ſigne $-$.

Et la formule générale, réduite pour l'équation particuliere propoſée, deviendra $x^3 - nx^2 + px - q = 0$.

283. Lorſque l'on change une équation en une autre de même degré, qui a une inconnue différente de l'inconnue de la propoſée, & dont toutes les racines ont un rapport connu avec les racines de la propoſée, ce changement s'appelle *transformation*, & la ſeconde équation ſe nomme la *transformée*.

284. Et parce que les racines de la transformée ont un rapport connu avec celle de la propoſée, il eſt

évident que les premieres étant connues, elles feront connoître les dernieres.

PROBLÊME I.

285. Transformer une équation proposée en une autre de même degré, dans laquelle une nouvelle inconnue y, augmentée ou diminuée d'une quantité connue a, ou multipliée, ou divisée par une grandeur donnée a soit égale à l'inconnue x de la proposée.

SOLUTION.

On fera, selon les cas énoncés, $\begin{cases} y+a=x \\ y-a=x \\ ay=x \\ \frac{y}{a}=x, \end{cases}$ & l'on substituera à x celle de ces valeurs dont il s'agira, l'équation que l'on trouvera étant ordonnée & abrégée, sera la transformée que l'on cherche.

Quand on aura la valeur de y dans la transformée, on la substituera à la place de y dans celle des valeurs de x que l'on aura employé, & l'on aura la valeur de x.

EXEMPLE.

Etant donnée l'équation $x^3 - nx^2 + px - q = 0$, la transformer.

286. 1°. En une autre dans laquelle $y+a=x$, ou, ce qui est la même chose, dans laquelle $y=x-a$.

On substituera à x^3 le cube de $y+a$; à nx^2 le produit de n par le quarré de $y+a$; à px le produit de p par $y+a$.

Ayant ordonné la nouvelle équation, on trouvera pour la transformée

$$\begin{array}{llll} y^3 & +3ay^2 & +3a^2y & +a^3 = 0 \\ & -n & -2an & -na^2 \\ & & +p & +ap \\ & & & -q, \end{array}$$

dans laquelle $y+a=x$; enſorte que lorſque l'on aura trouvé les valeurs de y dans cette transformée, ſi on les ſubſtitue à la place de y dans $y+a=x$, on aura évidemment les valeurs de x dans la propoſée.

287ᵉ. 2°. En une autre dans laquelle $y-a=x$, ou, ce qui eſt la même choſe, dans laquelle $y=x+a$, on mettra dans la propoſée $y-a$ & ſes puiſſances à la place de x & de ſes puiſſances; & ayant ordonné la nouvelle équation, on aura la transformée

$$\begin{array}{llll} y^3 & -3ay^2 & +3a^2y & -a^3=0 \\ & -n & +2an & -a^2n, \\ & & +p & -ap \\ & & & -q. \end{array}$$

dans laquelle $y-a=x$

Lorſque l'on aura trouvé les valeurs de y dans cette transformée, ſi on les met à la place de y dans $y-a=x$, on aura les valeurs de x dans la propoſée.

287ᵉ. 3°. En une autre dans laquelle $ay=x$, ou, ce qui eſt la même choſe, dans laquelle $y=\frac{x}{a}$.

On mettra dans la propoſée ay & ſes puiſſances à la place de x & de ſes puiſſances, & on aura $a^3y^3-a^2ny^2+apy-q=0$.

Et en diviſant tous les termes de cette équation par le coefficient a^3 du premier terme, on aura pour la transformée $y^3-\frac{ny^2}{a}+\frac{py}{a^2}-\frac{q}{a^3}=0$, dans laquelle $ay=x$, ou $y=\frac{x}{a}$, & dont les racines, lorſqu'elles ſeront connues, feront connoître celle de la propoſée, en les ſubſtituant à la place de y dans $ay=x$.

En conſidérant la compoſition de la transformée $y^3-\frac{ny^2}{a}+\frac{py}{a^2}-\frac{q}{a^3}=0$, qui eſt venue en faiſant

dans la propoſée $ay = x$, ou $y = \frac{x}{a}$, on conclura que pour transformer une équation en une autre dans laquelle une nouvelle inconnue y multipliée par une quantité connue a ſoit égale à l'inconnue x de la propoſée, ou, ce qui eſt la même choſe, pour diviſer la racine de la propoſée par une quantité quelconque, il faudra d'abord mettre la nouvelle inconnue y & ſes puiſſances à la place de x & de ſes puiſſances dans l'équation propoſée, & diviſer enſuite tous les termes exprimés ou évanouis par les termes correſpondans d'une ſuite dont le premier terme ſera l'unité, le ſecond la quantité diviſeur, le troiſieme le quarré de ce diviſeur, le quatrieme le cube de ce diviſeur, & ainſi de ſuite.

Par exemple, pour diviſer par 2 la racine de l'équation . . . . $x^3 - 8x^2 + 12x - 24 = 0$, ayant fait cette ſuite 1 . . 2 . . . 4 . . . 8, on ſubſtituera y à la place de x, & l'on diviſera les termes de l'équation par leurs correſpondans dans la ſuite.

Ce qui donnera la transformée $y^3 - 4y^2 + 3y - 3 = 0$, dans laquelle $y = \frac{x}{2}$, ou $2y = x$.

De même, pour diviſer par 3 la racine de l'équation . . . . $x^4 * - 9x^2 + 27x - 243 = 0$, ayant fait cette ſuite 1 3 . . 9 . . . 27 . . . 81, on ſubſtituera y à la place de x, & l'on diviſera les termes de l'équation par leurs correſpondans dans la ſuite.

Ce qui donnera la transformée $y^4 * - y^2 + y - 3 = 0$, dans laquelle $y = \frac{x}{3}$, ou $3y = x$.

288. 4°. Transformer l'équation $x^3 - nx^2 + px - q = 0$, en une autre dans laquelle $\frac{y}{a} = x$, ou $y = ax$.

On mettra dans la propoſée $\frac{y}{a}$ & ſes puiſſances à la place de x & de ſes puiſſances, & on aura $\frac{y^3}{a^3} - \frac{ny^2}{a^2} + \frac{py}{a} - q = 0$, qui, étant multipliée par a^3, diviſeur du premier terme, donnera pour la transformée $y^3 - any + a^2py - a^3q = 0$, dans laquelle $\frac{y}{a} = x$, ou $y = ax$, & dont les racines, lorſqu'elles ſeront trouvées, étant ſubſtituées dans $\frac{y}{a} = x$, feront connoître les racines de x dans la propoſée.

En conſidérant dans l'équation transformée $y^3 - any + a^2py - a^3q = 0$, la maniere dont les termes ſont formés, on conclura que pour transformer une équation en une autre dans laquelle une nouvelle inconnue y, diviſée par une quantité connue a, ſoit égale à l'inconnue x de la propoſée, ou, ce qui eſt la même choſe, pour multiplier la racine de la propoſée par une quantité quelconque, il faudra mettre la nouvelle inconnne y & ſes puiſſances à la place de x & de ſes puiſſances dans l'équation propoſée, & multiplier enſuite tous les termes exprimés ou évanouis par les termes correſpondans d'une ſuite formée comme dans le troiſieme cas (n°. 287); c'eſt-à-dire, dont le premier terme ſoit l'unité, le ſecond terme la quantité multiplicateur, le troiſieme le quarré de ce multiplicateur, le quatrieme ſon cube, &c.

Par exemple, pour multiplier par 4 la racine de l'équation . . . . . $x^4 * * + 2x - 1 = 0$, ayant fait cette ſuite . . . 1 . 4 . 16 . 64 . 256, on ſubſtituera y à la place x; & l'on fera la multiplication de chaque terme de l'équation par celui qui lui répond dans la ſuite; ce qui donnera la transfor-

mée $y^4 * * + 128y - 256 = 0$, dans laquelle $y = 4x$, ou $\frac{y}{4} = x$.

CONSÉQUENCES.

289. Premiere. En augmentant ou en diminuant d'une certaine quantité la racine d'une équation composée, ſelon les deux premiers cas des transformations (n°. 286, 287[a]), on peut ſouvent la changer en une autre dont le dernier terme ait moins de diviſeurs que celui de la propoſée.

Pour déterminer la grandeur dont il faut augmenter ou diminuer la racine de l'équation, on fera l'inconnue x de cette équation ſucceſſivement égale à $+$ ou -1, $+$ ou -2, $+$ ou -3, &c. & ayant ſubſtitué celui de ces nombres que l'on aura choiſi; & ſes puiſſances à la place de x & de ſes puiſſances, on fera la réduction de tous les termes numériques; & ſi le réſultat a moins de diviſeur que le dernier terme de l'équation propoſée, on fera $x = y \pm$ celui de ces nombres dont la ſubſtitution aura donné ce réſultat; puis on mettra cette valeur de x & ſes puiſſances à la place de x & de ſes puiſſances, & l'on aura une transformée dont le dernier terme aura moins de diviſeurs que celui de l'équation propoſée.

Par exemple, étant donnée l'équation $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, dont le dernier terme a le grand nombre de diviſeurs $1 . 2 . 3 . 4 . 6 . 8 . 12 . 24$, on fera dans cette équation $x = 1$; ce qui donnera $1 - 9 + 26 - 24 = -6$.

Comme le réſultat 6 a pour diviſeurs $1 . 2 . 3 . 6$, dont le nombre eſt beaucoup plus petit que celui des diviſeurs de 24, on transformera la propoſée en une autre dans laquelle $x = y + 1$.

La transformée ſera $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$, dont

dont le dernier terme 6 a beaucoup moins de diviſeurs que 24 dernier terme de la propoſée.

290. Seconde. Lorſque les termes d'une équation compoſée & ordonnée pourront être diviſés exactement par les termes correſpondans d'une ſuite, dont le premier terme ſera l'unité; le ſecond l'un des diviſeurs du coefficient du ſecond terme, ou l'un des diviſeurs du coefficient du troiſieme, lorſque le ſecond terme ſera évanoui, ou du quatrieme terme, lorſque le troiſieme & le ſecond ſeront évanouis, &c; le troiſieme, le quarré de ce diviſeur; le quatrieme, ſon cube, & ainſi de ſuite : ſi ayant ſubſtitué une nouvelle inconnue y à la place de l'inconnue x de la propoſée, on fait les diviſions des termes de l'équation par ceux qui leur répondent dans la ſuite, ce qui eſt diviſer la racine de la propoſée par le ſecond terme de la ſuite des diviſeurs (n°. 287[a]), on aura une transformée dont le dernier terme ſera plus petit que celui de la propoſée, & aura moins de diviſeurs.

Par exemple, les termes de l'équation $x^3 - 8x^2 + 12x - 24 = 0$, pouvant être diviſés par ceux qui leur répondent dans cette ſuite 1 . 2 . 4 . 8, dont le premier terme eſt l'unité, le ſecond l'un des diviſeurs du coefficient 8 du ſecond terme de la propoſée, & dont les autres termes ſont les puiſſances de ſuite de ce diviſeur, on ſubſtituera y à x, on fera la diviſion des termes correſpondans, & l'on aura la transformée $y^3 - 4y^2 + 3y - 3 = 0$, dans laquelle $y \times 2$, ſecond terme de la ſuite des diviſeurs, eſt égale à l'inconnue x de la propoſée, ou dans laquelle $y = \frac{x}{2}$, & dont le dernier terme a beaucoup moins de diviſeurs que le dernier terme 24 de la propoſée.

De même les termes de l'équation $x^4 * - 9x^2 + 27x - 243 = 0$, pouvant être diviſés par les ter-

mes correſpondans de la ſuite 1 . 3 . 9 . 27 . 81, dont le premier terme eſt l'unité, le ſecond l'un des diviſeurs du coefficient 9 du troiſieme terme de la propoſée, & dont les autres ſont les puiſſances de ſuite de ce diviſeur, on ſubſtituera dans la propoſée y à x, & l'on diviſera ſes termes par ceux qui leur répondent dans la ſuite; ce qui donnera la transformée $y^4 * \ -y^2+y-3=0$, dans laquelle $y=\frac{x}{3}$, & dont le dernier terme a beaucoup moins de diviſeurs que celui de la propoſée.

291. Troiſieme. Le quatrieme cas des transformations donne un moyen de délivrer de fractions une équation compoſée, ſans donner de coefficient au premier terme. Il faudra pour cela multiplier la racine de l'équation par le produit de tous les dénominateurs des termes fractionnaires, ou par la quantité dont les différentes puiſſances pourront être diviſées par ces dénominateurs.

Par exemple, pour délivrer de fractions l'équation $x^3-\frac{nx^2}{a}+\frac{px}{a}-\frac{q}{a}=0$, parce que les puiſſances de a ſont diviſibles par chaque dénominateur, on multipliera la racine de cette équation par a, ce que l'on exécutera en mettant d'abord (n°. 288) y à la place de x, & en multipliant les termes par ceux qui leur répondent dans la ſuite $1 . a . a^2 . a^3$; ce qui donnera la transformée $y^3-\frac{any^2}{a}+\frac{a^2py}{a}-\frac{a^3q}{a}=0$, qui ſe réduit à l'équation $y^3-ny^2+apy-a^2q=0$, qui eſt toute délivrée de fractions, & dans laquelle $\frac{y}{a}=x$, ou $y=ax$.

Si le premier terme d'une équation compoſée étoit diviſé par une quantité connue, il faudroit multiplier toute l'équation par cette quantité.

Par exemple, étant donnée l'équation ſuivante $\frac{x^3}{a} - nx^2 + px - q = 0$, on multipliera tous les termes par le diviſeur a du premier terme, & il viendra l'équation toute délivrée de fractions $x^3 - anx^2 + apx - aq = 0$.

Si le premier terme d'une équation compoſée avoit pour coefficient un nombre entier différent de l'unité, il faudroit d'abord diviſer tous les termes de l'équation par ce coefficient; & ſi cette diviſion rendoit quelques termes fractionnaires, il faudroit (n°. 291) transformer cette équation en une autre qui fût délivrée de fractions.

Par exemple, étant donnée l'équation ſuivante $ax^3 - nx^2 + px - q = 0$, on diviſera tous les termes par le coefficient a, & l'on aura la nouvelle équation $x^3 - \frac{nx^2}{a} + \frac{px}{a} - \frac{q}{a} = 0$, qu'il ne s'agira que de délivrer de fractions, comme l'on a fait ci-deſſus (n°. 291).

PROBLÊME II.

292. Transformer une équation compoſée en une autre qui n'ait point de ſecond terme.

SOLUTION.

On fera l'inconnue x de l'équation propoſée égale à une autre inconnue + ou —, le coefficient du ſecond terme diviſé par l'expoſant de la plus haute puiſſance de l'inconnue, + ſi le ſecond terme de la propoſée eſt négatif, & — s'il eſt poſitif.

On ſubſtituera cette valeur à la place de x dans l'équation propoſée, & l'on aura la transformée qui n'aura pas de ſecond terme.

EXEMPLE.

Pour changer l'équation $x^3 - nx^2 + px - q = 0$ en une autre qui n'ait point de second terme, on suppose $x = y + \frac{n}{3}$, & l'on substituera $y + \frac{n}{3}$, & ses puissances à la place de x & de ses puissances.

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + ny^2 + \frac{n^2 y}{3} + \frac{n^3}{27} \\ -nx^2 &= -ny^2 - \frac{2n^2 y}{3} - \frac{n^3}{9} \\ +px &= +py + \frac{pn}{3} \\ -q &= -q, \end{aligned}$$

& l'on aura la transformée $y^3 * - \frac{n^2 y}{3} - \frac{2n^3}{a^7} = 0$
$+p + \frac{pn}{3}$

qui n'a pas de second terme $-q$,
& dans laquelle $y + \frac{n}{3} = x$, & dont les racines, lorsqu'elles seront trouvées, étant substituées dans $y + \frac{n}{3} = x$ à la place de y, feront connoître les racines de x dans la proposée.

REMARQUE.

293. Voici comme l'on a pu déterminer la quantité qui, ajoutée ou retranchée de la nouvelle inconnue y, puisse faire disparoître le second terme d'une équation.

On a désigné, par exemple, par z cette quantité, & faisant $x = y + z$, lorsque le second terme de la proposée a le signe $-$, & $x = y - z$, lorsque le second terme a le signe $+$, on a substitué $y \pm z$ & ses puissances à la place de x & de ses puissances dans l'équation proposée; faisant après cela dans la trans-

formée le ſecond terme égal à zero, on a eu une équation du premier degré, dont la réſolution a donné la valeur de z telle qu'on l'a déterminée dans la ſolution du problême précédent.

EXEMPLE.

Pour découvrir dans la propoſée $x^3 - nx^2 + px - q = 0$ la quantité propre à faire diſparoître le ſecond terme, on fera $x = y + z$, parce que le ſecond terme a le ſigne —; on ſubſtituera $y + z$ & ſes puiſſances à la place de x & de ſes puiſſances, & l'on aura cette transformée $y^3 + 3zy^2 + 3z^2y + z^3 = 0$,
$- ny^2 - 2nzy - nz^2$
$+ py \quad + pz$
$- q$.

Suppoſant ſon ſecond terme égal à zero, c'eſt-à-dire, $3zy^2 - ny^2 = 0$, on aura $3zy^2 = ny^2$, ou $3z = n$, d'où l'on tirera $z = \frac{n}{3}$.

Et ſubſtituant cette valeur de z dans $x = y + z$, il vient $x = y + \frac{n}{3}$.

Ce qui montre que pour transformer la propoſée en une autre qui n'ait point de ſecond terme, il faut, comme on l'a preſcrit, faire l'inconnue x de la propoſée égal $y +$ le coefficient n du ſecond terme diviſé par l'expoſant 3 de la plus haute puiſſance.

Et ſi le ſecond terme de la propoſée étoit poſitif, il faudroit, pour ôter le ſecond terme, la transformer en une autre dans laquelle $x = y - \frac{n}{3}$. Ce que l'on trouveroit encore aiſément en faiſant dans la propoſée $x = y - z$, & en égalant enſuite le ſecond terme de la transformée à zero.

Pour faire évanouir le troiſième terme de la propoſée $x^3 - nx^2 + px - q = 0$; après avoir fait $x = y + z$ pour avoir la transformée ci-deſſus, on

fera le troiſieme terme de cette transformée $3z^2y - 2nzy + py = 0$; ce qui donnera l'équation du ſecond degré ſuivante $z^2 - \frac{2nz}{3} + \frac{p}{3} = 0$ (n°. 218), de laquelle on tire (n°. 239) $z = \frac{n}{3} \pm \sqrt{\frac{n^2}{9} - \frac{p}{3}}$.

Ainſi en faiſant dans la propoſée $x = y + \frac{n}{3} + \sqrt{\frac{n^2}{9} - \frac{p}{3}}$, on aura une transformée qui n'aura pas de troiſieme terme.

Si l'on vouloit faire évanouir le quatrieme terme, il faudroit réſoudre l'équation $z^3 - nz^2 + pz - q = 0$, qui eſt du troiſieme degré, & ainſi de ſuite.

PROBLÊME III.

293. Les termes d'une équation compoſée n'ayant pas alternativement les ſignes +, −, transformer cette équation en une autre dans laquelle les termes aient cette alternative ; c'eſt-à-dire, transformer une équation qui a des racines négatives en une autre dont toutes les racines ſoient poſitives.

SOLUTION.

On prendra en + la plus grande quantité négative connue que l'équation propoſée renferme ; & l'ayant augmentée de l'unité, on ſuppoſera l'inconnue de l'équation propoſée égale à cette quantité moins en une autre inconnue y : on ſubſtituera dans l'équation propoſée cette valeur & ſes puiſſances à la place de x & de ſes puiſſances, & l'on aura une transformée dans laquelle les termes auront l'alternative des ſignes + & −; & dont les racines, lorſqu'elles ſeront trouvées, feront connoître les racines de la propoſée en les ſubſtituant à la place de y dans la valeur de x.

EXEMPLE I.

Pour transformer l'équation $x^3-4x^2+x+6=0$ en une autre dont les termes ayent alternativement $+$ & $-$, on prendra en $+$ le coefficient négatif -4, on lui ajoutera 1, ce qui fera $+5$, on fera $5-y=x$, & l'on mettra $5-y$ & ſes puiſſances à la place de x & de ſes puiſſances dans la propoſée.

$x^3=\overline{5-y}^3=+125-75y+15y^2-y^3$

$-4x^2=\overline{5-y}^2\times-4=-100+40y-4y^2$

$+x=\overline{5-y}\times1=+5-y$

$+6=\ldots\ldots+6.$

Ce qui donnera la transformée $0=36-36y+11y^2-y^3$, & en tranſpoſant . . . $y^3-11y^2+36y-36=0$, dans laquelle on trouve l'alternative des ſignes $+$ & $-$.

Ce qui doit arriver ainſi; car chaque terme de la plus haute puiſſance $\overline{5-y}^3$ de $5-y$ eſt, comme on le voit, une partie du terme correſpondant de la transformée, & chaque terme de cette puiſſance eſt plus grand lui ſeul que toutes les autres quantités du même terme de la transformée, qui pourroient avoir des ſignes contraires au ſien; par conſéquent chaque terme de la transformée a le même ſigne que le terme correſpondant de la plus haute puiſſance de $5-y$: or il eſt viſible que les termes de cette plus haute puiſſance doivent avoir l'alternative des ſignes $+$ & $-$ (n°. 206). Par conſéquent les termes de la transformée doivent avoir l'alternative des ſignes $+$ & $-$.

Et lorſque l'on aura les valeurs de y dans cette transformée, ſi on les ſubſtitue à ſa place dans $x=5$

$-y$, on aura évidemment les valeurs de x dans la proposée.

EXEMPLE II.

Pour transformer l'équation $x^3+2x^2-x-2=0$ en une autre dont les termes ayent alternativement $+$ & $-$, on prendra en $+$ la plus grande quantité négative -2, qui est le dernier terme de la proposée, on lui ajoutera 1, ce qui donnera $+3$; on fera $3-y=x$, & l'on mettra $3-y$ & ses puissances à la place de x & de ses puissances dans la proposée.

$$\overline{3-y}^{3} = +27-27y+9y^2-y^3$$

$$2\overline{3-y}^{2} \times 2 = +18-12y+2y^2$$

$$-\overline{3-y} \times -1 = -3+y$$

$$-2 = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -q,$$

& l'on aura . . . $0=40-38y+11y^2-y^3$;

ou bien . . . $y^3-11y^2+38y-40=0$, pour la transformée, dans laquelle les termes ont alternativement $+$ & $-$, & dont les racines, lorsqu'elles seront trouvées, feront connoître celle de la proposée en les substituant dans $x=3-y$.

ARTICLE III.

Résolution des Equations composées, lorsqu'elles ont des racines commensurables.

PROBLÊME.

294. *Trouver les racines commensurables d'une équation quelconque composée, lorsqu'elle en renferme.*

SOLUTION.

Dans toute équation composée, le dernier terme

eſt toujours le produit de toutes les racines (n°. 277); par conſéquent on doit trouver les racines en diviſant l'équation par $x \pm$ chaque produiſant du dernier terme.

EXEMPLE.

Pour trouver les racines commenſurables de l'équation $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$, on commencera par chercher les diviſeurs du dernier terme -2, on trouvera que les diviſeurs ſont 1 & 2.

On eſſayera enſuite de diviſer l'équation par $x-1$, $x-2$, $x+1$, $x+2$, la diviſion réuſſit par $x+1$ & par $x+2$; & en diviſant l'équation propoſée par le produit $\overline{x+1} \times \overline{x+2}$ de ces diviſeurs, il vient au quotient $x-1$.

Par conſéquent l'équation propoſée auroit pu s'écrire de cette ſorte $\overline{x+1} \times \overline{x+2} \times \overline{x-1} = 0$, & ſes racines ſont -1, -2, $+1$,

REMARQUES.

I.

295. Si on ſubſtitue à l'inconnue & à ſes puiſſances dans l'équation propoſée chacun des produiſans du dernier terme, & que l'on remarque les cas où les termes numériques ſe détruiſent, c'eſt-à-dire, ſe réduiſent à zero, on conclura que les produiſans que l'on aura ſubſtitués dans ces cas ſont les valeurs de x (n°. 275).

Dans l'exemple propoſé $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$, on reconnoît que $+1$, -1, -2, ſont chacun la valeur de x, parce que chacune de ces valeurs & ſes puiſſances étant ſubſtituées à x & à ſes puiſſances dans la propoſée, tout ſe réduit à zero.

II.

296. Lorſque l'équation propoſée ne pourra ſe diviſer par aucune équation ſimple formée de x, $+$ ou $-$, quelqu'un des produiſans du dernier terme, ou lorſqu'ayant ſubſtitué à l'inconnue & à ſes puiſſances chacun des produiſans du dernier terme, les termes numériques ne ſe détruiſent point, c'eſt-à-dire, ne ſe réduiſent point à zero, ce ſera une marque que cette équation n'aura aucune racine commenſurable.

III.

297. Lorſque les ſignes d'une équation complette ſont tous $+$, les racines de cette équation étant négatives (n°. 270), il eſt évident qu'il ſuffira d'eſſayer les diviſions par $x+$ chaque produiſant du dernier terme, ou de ſubſtituer à l'inconnue & à ſes puiſſances chaque produiſant du dernier terme pris négativement.

Pour trouver les racines de l'équation ſuivante $x^3+6x^2+11x+6=0$, dont tous les termes ſont affectés du ſigne $+$, & dont toutes les racines ſont par conſéquent négatives, on cherchera les diviſeurs du dernier terme 6, qui ſont 1 . 2 . 3 . 6, on eſſayera enſuite de diviſer l'équation propoſée par $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+6$. Comme la diviſion réuſſit par $x+1$, par $x+2$ & par $x+3$, on conclura que les trois racines négatives de la propoſée ſont -1, -2, -3.

IV.

298. Lorſque les ſignes d'une équation complette ſeront alternativement $+$ & $-$, les racines étant alors poſitives (n°. 270), il ſuffira de tenter la diviſion de l'équation par $x-$ chaque produiſant du der-

nier terme, ou de ſubſtituer à x & à ſes puiſſances chacun des produiſans du dernier terme pris poſitivement.

Pour trouver les racines de cette équation $x^3 - 10x^2 + 17x - 8 = 0$, dont les termes ont alternativement + & —, & dont toutes les racines ſont par conſéquent poſitives, on cherchera d'abord les diviſeurs du dernier terme 8, qui ſont 1 . 2 . 4 . 8; on eſſayera de diviſer la propoſée par $x - 1$, $x - 2$, $x - 4$, $x - 8$. Comme la diviſion réuſſit par $x - 1$ & par $x - 8$, & qu'en diviſant l'équation propoſée par le produit $\overline{x - 1} \times \overline{x - 8}$, il vient encore au quotient $x - 1$, on conclura que la propoſée a deux racines égales chacune à + 1, & que la troiſieme racine eſt + 8.

V.

Lorſque dans l'équation propoſée il y aura des ſignes + & —, ſans que l'alternative y ſoit obſervée, on pourra la changer en une autre où cette alternative ſoit obſervée (n°. 293), pour opérer enſuite comme on vient de le dire (n°. 298).

VI.

299. Si le dernier terme d'une équation a un grand nombre de diviſeurs, pour diminuer le nombre des diviſions qu'il faudra eſſayer, on pourra transformer cette équation en une autre dont le dernier terme ait moins de diviſeurs (n°. 289, 290).

VII.

300. Lorſque dans l'équation propoſée il y aura des coefficiens fractionnaires, pour trouver par la méthode précédente ſes racines commenſurables (294),

il faudra la transformer en une autre qui ſoit délivrée de fractions (n°. 291), ſans donner de coefficient au premier terme.

Et ſi le premier terme de l'équation propoſée avoit un coefficient différent de l'unité, il faudroit la transformer en une autre dont le premier terme n'eût point de coefficient autre que l'unité, & laquelle fût en même-tems délivrée de fractions (n°. 291).

ARTICLE IV.

Réſolution des Equations d'un degré quelconque, lorſqu'elles n'ont que deux termes, ou bien lorſqu'ayant trois termes elles ſont réductibles à celles qui n'en ont que deux par la méthode des Equations du ſecond degré.

PROBLÊME I.

301. *Trouver la valeur de l'inconnue dans une équation d'un degré quelconque, lorſque cette équation n'a que deux termes.*

SOLUTION.

Si la puiſſance de l'inconnue eſt embarraſſée dans le membre où elle eſt, on commencera par la dégager, enſuite on extraira de chaque membre de l'équation la racine indiquée par l'expoſant de la puiſſance à laquelle l'inconnue eſt élevée; & on aura la valeur de cette inconnue.

Par exemple, étant donnée l'équation à deux termes . . . . . $ax^m = q$,

après l'avoir préparé ainſi . . . . . $x^m = \frac{q}{a}$,

on extraira la racine m, & on aura . . . $x = \sqrt[m]{\frac{q}{a}}$.

REMARQUE.

302. *Si l'expoſant* m *de l'inconnue eſt impair, par*

exemple 3 *ou* 5, *ou* 7, &c. x *ne pourra avoir qu'une valeur réelle, positive si* $\frac{q}{a}$ *est positif, & négative si* $\frac{q}{a}$ *est négatif, la racine quelconque d'un degré impair d'une quantité ayant toujours le même signe que cette quantité; & les autres racines que l'on trouveroit en divisant, par exemple, l'équation* $ax^3 - q = 0$ *par* $x - \sqrt[3]{\frac{q}{a}} = 0$, *& en résolvant l'équation résultante seroient nécessairement imaginaires, ce dont on peut se convaincre en faisant l'opération.*

Mais sans recourir au calcul, on conçoit aisément que l'équation $x^5 = 1024$, *d'où l'on tire* $x = \sqrt[5]{1024} = +4$, *ne peut avoir d'autres racines réelles que* $+4$, *autrement il y auroit un autre nombre réel que* $+4$ *qui, élevé à sa cinquieme puissance, produiroit* 1024; *ce qui est impossible. Les quatre autres racines de l'équation* $x^5 = 1024$ *sont donc imaginaires?*

Si l'exposant m *est un nombre pair, par exemple,* 4, 6, &c. *la racine* m *aura comme dans le second degré, le double signe* $\pm$, *& ces deux racines exprimées par* $\pm \sqrt[m]{\frac{q}{a}}$, *ne seront réelles que lorsque* $\frac{q}{a}$ *sera positif.*

Par exemple, dans l'équation $x^4 = 16$, *les deux racines réelles sont* $+2$, -2, *& les deux imaginaires sont* $+\sqrt{-4}$, $-\sqrt{-4}$.

Les équations exprimées généralement par $x^m = \frac{q}{a}$, *ne peuvent donc avoir au plus que deux racines réelles, toutes les autres étant nécessairement imaginaires.*

PROBLÊME II.

303. *Trouver la valeur de l'inconnue dans une équation d'un degré quelconque, composée de trois termes*

réductibles à deux par la méthode des équations du second degré.

SOLUTION.

Les équations dont il s'agit ſont celles dont le premier terme renferme l'inconnue élevée à une puiſſance double de celle à laquelle elle eſt élevée dans le ſecond terme, & dont le troiſieme terme eſt tout connu.

On peut les repréſenter par l'équation générale $x^{2m} + px^m = q$.

Pour les réſoudre on ajoutera, comme dans les équations du ſecond degré (236), ce qui manque au premier membre pour être un quarré parfait, & l'on aura . . . $x^{2m} + px^m + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$, prenant la racine quarrée il viendra . . $x^m + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, & par conſéquent . . $x^m = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$; ce qui n'eſt plus qu'une équation dans laquelle on aura la valeur de x, comme dans le problême précédent, en prenant la racine m de chaque membre de cette ſorte $x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}}$.

REMARQUES.

I.

304. Dans l'équation $x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}}$ que l'on vient de trouver pour la valeur de x dans $x^{2m} + px^m = q$, ſi l'expoſant m eſt un nombre impair, la racine m de la quantité $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, ne pouvant être affectée que d'un ſeul ſigne ; à ſavoir, $+$, lorſque cette quantité eſt poſitive, & $-$ lorſque cette quantité eſt négative, elle ne pourra avoir

que les deux valeurs réelles que peut occaſionner le double ſigne $\pm$ du radical $\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$.

Au contraire, ſi l'expoſant m eſt un nombre pair, la racine m de la quantité $-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, aura le double ſigne $\pm$, & la valeur de x pourra s'écrire de cette ſorte . . $x=\pm\sqrt[m]{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}$,

ou . . . 1°. $x=+\sqrt[m]{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}$; ce qui peut fournir deux valeurs réelles.

2°. $x=-\sqrt[m]{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}$; ce qui peut donner encore deux valeurs réelles, & x pourra avoir en tout quatre valeurs réelles.

On conclura que les équations exprimées généralement par $x^{2m}+px^m=q$, ne peuvent avoir plus de quatre racines réelles, & qu'elles n'en auront que deux lorſque m ſera un nombre impair.

II.

305. On remarquera encore touchant la valeur de x dans $x=\sqrt[m]{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}$, que la quantité $-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$ qui eſt ſous le ſigne radical $\sqrt{\ }$, & qui eſt compoſée d'un radical du ſecond degré, & d'une grandeur non radicale, pouvant être une puiſſance exacte du degré m, dont on peut par conſéquent extraire la racine du degré déſigné par m, il eſt néceſſaire pour rendre complette la réſolution des équations à trois termes dont on vient de parler, de donner des méthodes pour reconnoître quand les quantités compoſées de grandeurs radicales du ſecond degré, & de grandeurs non radicales, ſont des puiſſances exactes; & pour trouver leurs racines, on donnera dans le dernier chapitre de ce volume des regles

pour juger quand ces quantités ſont des quarrés ou des cubes parfaits, & pour en extraire leurs racines quarrées & cubiques: il ſera aiſé après cela de trouver les méthodes pour l'extraction des racines des autres degrés de ces quantités.

ARTICLE V.

Réſolution des Equations du troiſieme degré.

Comme l'on ſait (n°. 292) transformer une équation complette en une autre qui n'a pas de ſecond terme, & dont les racines, lorſqu'elles ſeront trouvées, feront connoître celle de l'équation complette propoſée, il ſuffira de donner la réſolution des équations du troiſieme degré, qui n'ont point de ſecond terme.

Lorſque l'on aura à réſoudre une équation complette du troiſieme degré, il faudra au préalable la transformer en une autre qui n'ait point de ſecond terme.

PROBLÊME.

306. *Déterminer la valeur de l'inconnue dans une équation du troiſieme degré, qui n'a pas de ſecond terme.*

SOLUTION.

Toutes les équations du troiſieme degré qui n'ont point de ſecond terme, peuvent être repréſentées par $x^3 * + px + q = 0$.

Pour déterminer la valeur de x dans cette équation, on fera $x = y + z$; & ſubſtituant $y + z$ & ſes puiſſances à la place de x & de ſes puiſſances dans la propoſée, on aura l'équation $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + py + pz + q = 0$, dans laquelle, à cauſe des indéterminées y & z, on peut ſuppoſer $y^3 + z^3 + q = 0$, & $3y^2z + 3yz^2 + py + pz = 0$.

Cette

Cette derniere équation étant diviſée par $y+z$, on aura $3yz+p=0$, d'où l'on déduit $z=\frac{-p}{3y}$; mettant cette valeur de z dans $y^3+z^3+q=0$, il viendra $y^3\frac{-p^3}{27y^3}+q=0$; tranſpoſant $\frac{-p^3}{27y^3}$, & multipliant par y^3 les deux membres, on aura l'équation à trois termes $y^6+qy^3=\frac{p^3}{27}$ qui eſt du nombre de celles dont on a donné la réſolution dans l'article précédent (n°. 303), & d'où l'on tire . . . . . $y=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$; mettant cette valeur dans l'équation $z=\frac{-p}{3y}$, on trouvera . . . $z=\frac{-\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}}$, & comme $-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}\times\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\frac{1}{27}p^3$, & que par conſéquent $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\times\sqrt[3]{\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3}=\frac{1}{3}p$, il eſt évident que $\frac{1}{3}p$ étant diviſé par l'un de ſes produiſans, ſavoir $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, donnera au quotient l'autre de ſes produiſans; c'eſt-à-dire, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q\mp\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, ainſi $z=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, & comme $x=y+z$, mettant à la place de y & de z leurs valeurs, on conclura que . . . . . $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$,

ou bien

$$x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}.$$

Car la valeur de x, quand on prend le radical

$\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ en plus, eſt la même que quand on le prend en moins.

Application de la formule touchant la valeur de x *dans l'équation générale* $x^3 * +px+q=0$.

Pour faire voir comme à l'aide de la formule $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, touchant la valeur de x dans l'équation générale propoſée, on pourra déterminer la valeur de x dans une équation particuliere du troiſieme degré qui n'a pas de ſecond terme, ou qu'on aura délivrée du ſecond terme, on propoſera l'exemple qui ſuit.

EXEMPLE.

Déterminer la valeur de x dans $x^3 * +3x-36=0$, comparant cette équation à $x^3 * +px+q=0$, on aura . . . . . $p=3$, $q=-36$; ainſi . . . $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{325}=5\sqrt{13}$, & par conſéquent ſi on ſubſtitue ces valeurs dans $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, on aura . . . $x=\sqrt[3]{18+5\sqrt{13}}-\sqrt[3]{5\sqrt{13}-18}$.

Or comme on verra dans la ſuite . . $\begin{cases}\sqrt[3]{18+5\sqrt{13}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}\\ \sqrt[3]{5\sqrt{13}-18}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13},\end{cases}$

Donc $x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13}=\frac{6}{2}=3$.

REMARQUES.

I.

307. Pour déterminer les deux autres racines de $x^3 * +px+q=0$, on diviſera cette équation par $x-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=0$;

le quotient ſera une équation du ſecond degré, dont les deux racines ſeront celles que l'on cherche.

Pour abréger le calcul on fera . . . $\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} = a, \\ \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} = b, \end{cases}$

on aura $\begin{cases} ab = \frac{1}{3}p, \\ \text{ou } 3ab = p \\ \text{\& } a^3 - b^3 = q. \end{cases}$

En ſubſtituant ces valeurs dans le dividende & dans le diviſeur, on aura à diviſer $x^3 + 3abx + a^3b^3 = 0$ par $x + a - b = 0$, dont le quotient ſera $x^2 + bx - ax + a^2 + b^2 + ab = 0$, ou $x^2 + bx - ax = -a^2 - b^2 - ab$.

Opérant ſur cette équation comme on a opéré ſur celles du ſecond degré, on déduira . . . . . .

. . . . . $x = \frac{a-b}{2} \pm \frac{\sqrt{a+b \times \sqrt{-3}}}{2}$;

& en rétabliſſant à la place de a & de b leurs valeurs, il viendra pour les deux autres valeurs de x cette équation :

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} \pm \frac{\sqrt{-3}}{\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} \times \sqrt{-3}}$$

II.

308. Il eſt évident que la premiere valeur de x ſera réelle, & que les deux autres ſeront imaginaires, lorſque le radical $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ ſera une quantité réelle, ce qui arrivera lorſque $\frac{1}{27}p^3$ ſera poſitif, ou lorſqu'étant négatif, il ſera moindre que $\frac{1}{4}q^2$.

Que ſi le radical eſt imaginaire, ce qui arrivera lorſque $\frac{1}{27}p^3$ ſera négatif, & en même tems plus grand que $\frac{1}{4}q^2$, alors les deux quantités $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$

& $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, qui compoſent la premiere valeur de l'inconnue x, ſeront imaginaires; mais cela n'empêchera point que cette valeur de x ne ſoit réelle.

Car ſi l'on fait $\frac{1}{2}q=a$, & $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=b\sqrt{-1}$, on aura $x=\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$, & l'on trouvera (n°. 217) pour la valeur une ſuite infinie qui ne contiendra point d'imaginaires. Ainſi la valeur de x eſt réelle.

Comme l'on n'a pu encore déterminer la ſomme de cette ſuite infinie, il ſuit que dans le cas où $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ eſt imaginaire, on ne peut trouver qu'une racine approchée de x par le moyen de cette ſuite.

En ſuppoſant $a>b$ les termes de cette ſuite iront en diminuant, & l'on pourra arriver plûtôt aux termes qui ſeront aſſez petits pour être négligés (n°. 216).

Si $b>a$, il faudra pour former la puiſſance $\frac{1}{3}$ de chaque binome $-a+b\sqrt{-1}$ & $a+b\sqrt{-1}$, faire d'abord changer de place les termes de ce binome en ce ſens $b\sqrt{-1}-a$, & $b\sqrt{-1}+a$.

Cherchant enſuite la valeur de $\sqrt[3]{b\sqrt{-1}-a}-\sqrt[3]{b\sqrt{-1}+a}$ (n°. 217), on la trouvera encore exprimée par une ſuite infinie qui donnera cette valeur, d'autant plus approchée qu'elle ſera compoſée d'un plus grand nombre de termes (n°. 215).

Le radical $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ étant toujours ſuppoſé imaginaire, ſi on éleve à la puiſſance $\frac{1}{3}$ les deux autres valeurs (n°. 217) de . . . . . .

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}.$$

$$\pm\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}\times\sqrt{-\tfrac{3}{4}},$$

on trouvera que dans la ſuite qui en réſultera les termes affectés de radicaux imaginaires auront des ſignes contraires, & par conſéquent ſe détruiront; d'où l'on conclura que dans la ſuppoſition du radical imaginaire $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$, les deux autres racines de x ſont encore réelles, & par conſéquent toutes les trois ſont réelles.

III.

309. Lorſque le radical $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ ſera zero, ce qui arrivera lorſque $\frac{1}{27}p^3$, ſera négatif & égal à $\frac{1}{4}q^2$; alors la premiere valeur $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, ſe réduit évidemment à $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}=-2\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$, & les deux autres racines exprimées par . . . . . .

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\pm\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\times\sqrt{-3},$$

ſe réduiront à

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q}\pm\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q}\times\sqrt{-3},$$

enſuite à . . $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}\pm 0=\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$;

ce qui montre que ces deux racines ſont égales.

CHAPITRE NEUVIEME.

Propriétés des raiſons, proportions & progreſſions géométriques.

SECTION PREMIERE.

Propriétés des raiſons & proportions géométriques.

ARTICLE I.

Définitions & Principes.

PREMIERE DÉFINITION.

310. RAPPORT ou *raiſon* c'eſt la comparaiſon de deux grandeurs.

Le rapport ou la raiſon ſe nomme *arithmétique*, lorſque l'on compare une grandeur avec une autre en examinant leur différence. Par exemple, ſi on compare 9 avec 3, en examinant la quantité dont 9 ſurpaſſe 3, ou dont 3 eſt ſurpaſſé par 9; cette comparaiſon eſt la raiſon arithmétique de 9 à 3.

Le rapport ſe nomme *géométrique*, lorſque l'on compare une grandeur avec une autre, en examinant combien de fois l'une contient l'autre. Par exemple, ſi on compare 9 à 3, en conſidérant combien de fois 9 contient 3, cette comparaiſon eſt dite le rapport géométrique de 9 à 3.

Il ſuit de cette définition générale, 1°. que toute raiſon, ſoit arithmétique, ſoit géométrique, renferme deux grandeurs; ces deux grandeurs ſont dites en

général *les termes* du rapport, & en particulier l'on appelle *antécédent* celle que l'on nomme ou que l'on écrit la premiere, & l'autre ſe nomme *conſéquent* dans la raiſon propoſée de 9 à 3, 9 eſt antécédent, & 3 conſéquent.

2°. La raiſon géométrique conſiſte proprement dans le quotient de l'un des termes diviſé par l'autre, d'où l'on conclura d'abord qu'un rapport géométrique indiqué, n'eſt qu'une diviſion indiquée dans laquelle on propoſera toujours de diviſer l'antécédent par le conſéquent. Pour indiquer cette diviſion on écrira le conſéquent à la ſuite de l'antécédent, & on les ſéparera par deux points l'un deſſous l'autre. Par exemple, l'expreſſion 6 : 3, eſt le rapport géométrique de 6 à 3, ou la diviſion indiquée de 6 par 3.

On conclura ſecondement que pour déterminer le rapport géométrique de deux grandeurs, il faut diviſer l'antécédent par le conſéquent; & parce que le quotient de cette diviſion marquera la valeur préciſe du rapport géométrique, on l'appellera l'*expoſant* du rapport géométrique. Par exemple, pour déterminer le rapport géométrique de 9 à 3, on diviſera l'antécédent 9 par le conſéquent 3, & le quotient 3 qui viendra, ſera dit l'expoſant de cette raiſon.

Pour déterminer le rapport géométrique de 2 à 6, on exprimera la diviſion de l'antécédent 2 par le conſéquent 6 par la fraction $\frac{2}{6}$, laquelle étant réduite à ſa plus ſimple expreſſion $\frac{1}{3}$, ſera dite l'expoſant de la raiſon 2 : 6.

On conclura enfin que deux raiſons géométriques ſont égales lorſque les antécédens de ces raiſons contiennent également leurs conſéquens; c'eſt-à-dire, lorſque les expoſans de ces raiſons ſont égaux : ainſi les raiſons 6 : 3, 8 : 4 ſont égales, parce que l'expoſant de chacune de ces raiſons eſt 2.

SECONDE DÉFINITION.

Raiſon compoſée. En général c'eſt une raiſon dont l'antécédent eſt le produit des antécédens de pluſieurs raiſons données, & dont le conſéquent eſt le produit de leurs conſéquens.

Par exemple, étant données les raiſons $a : b$, $c : d$, $f : h$, ſi l'on multiplie enſemble tous les antécédens, & enſemble tous les conſéquens, & que l'on faſſe la raiſon $acf : bdh$, dont l'antécédent acf eſt le produit des antécédens, & le conſéquent bdh eſt le produit des conſéquens des raiſons données, cette raiſon ſera dite compoſée des raiſons données.

La raiſon compoſée eſt dite en particulier *doublée*, *triplée*, *quadruplée*, &c. quand elle eſt compoſée de deux ou de trois, ou de quatre raiſons égales; par exemple, les raiſons $8 : 4$, $6 ; 3$ étant égales, la raiſon $8 \times 6 : 4 \times 3$ compoſée de ces deux raiſons égales eſt dite doublée.

Et la raiſon $10 \times 8 \times 6 : 5 \times 4 \times 3$, laquelle eſt compoſée des trois raiſons égales $10 ; 5$, $8 : 4$, $6 ; 3$, eſt dite triplée.

TROISIEME DÉFINITION.

La proportion géométrique eſt la comparaiſon de deux rapports géométriques égaux.

La proportion géométrique eſt donc compoſée de quatre termes, tels que le premier contient le ſecond, comme le troiſieme contient le quatrieme.

On l'écrit en mettant de ſuite les deux rapports égaux, & en les ſéparant par quatre points, dont deux ſupérieurs & deux inférieurs.

Par exemple, les deux rapports géométriques $8 : 4$, $6 ; 3$ étant égaux, la proportion géométrique qu'ils compoſent s'exprimera ainſi . . . $8 : 4 :: 6 ; 3$.

En général ſi l'on ſuppoſe que les raiſons $a : b$, $c : d$ ſont égales, la proportion qu'elles compoſent s'exprimera ainſi . . . . . $a : b :: c : d$; & on l'énoncera en diſant a eſt à b comme c eſt à d, ou a contient b, comme c contient d.

Le premier antécédent a de la proportion, & le ſecond conſéquent d, ſe nomment les *extrêmes*.

Le premier conſéquent b, & le ſecond antécédent c, ſe nomment les *moyens*.

QUATRIEME DÉFINITION.

Une proportion géométrique continue eſt une proportion dans laquelle le premier conſéquent ſert de ſecond antécédent.

Telle eſt la proportion 8 eſt à 4, comme 4 eſt à 2; on l'écrit ainſi . . . . . $\div\div 8 : 4 : 2$.

Et en général ſi l'on ſuppoſe que les grandeurs a, b, c ſont telles que la premiere contienne la ſeconde comme la ſeconde contient la troiſieme, on l'exprimera ainſi . . . . . $\div\div a : b : c$.

Le terme du milieu, qui ſert de premier conſéquent & de ſecond antécédent, ſe nomme *moyen proportionel*.

CINQUIÉME DÉFINITION.

On dit qu'on *alterne* lorſque dans une proportion donnée $a : b :: c : d$, on prend le ſecond antécédent pour le premier conſéquent, & le premier conſéquent pour le ſecond antécédent, de cette ſorte $a : c$, $b : d$.

On *permute* lorſque dans une équation donnée $a : b :: c : d$, on met chaque antécédent à la place de ſon conſéquent, & chaque conſéquent à la place de ſon antécédent, de cette ſorte . . . $b : a$, $d : c$.

On *compoſe* lorſque dans une proportion donnée $a : b :: c : d$, on ajoute chaque antécédent à ſon con-

ſéquent de cette ſorte $a : b + a, c : d + c$, ou chaque conſéquent à ſon antécédent, de cette ſorte . . . . . $a + b : b, c + d : d$.

On *ſouſtrait* lorſque dans une proportion donnée $a : b :: c : d$, on retranche chaque antécédent de ſon conſéquent de cette ſorte $a : b - a, c : d - c$, ou chaque conſéquent de ſon antécédent, de cette ſorte . . . . . $a - b : b, c - d : d$.

Dans la ſuite, lorſque l'on parlera des raiſons & proportions ſans déſigner les arithmétiques ou les géométriques, on entendra toujours les raiſons & proportions géométriques.

PRINCIPES.

311. *Premier principe.*

Dans une proportion a : b : : c : d, *ſi les antécédens ſont égaux, les conſéquens le ſeront auſſi.*

Car ſi les antécédens étant égaux, les conſéquens étoient inégaux, ces conſéquens ne ſeroient pas contenus de la même maniere dans les antécédens, & dès lors il n'y auroit point de proportion.

On dira de même que l'égalité des conſéquens entraîne celle des antécédens, & que l'égalité des deux premiers termes entraîne celle des deux derniers, & réciproquement.

312. *Second principe.*

Deux grandeurs ſont égales entr'elles lorſqu'elles ont un même rapport avec une troiſieme; c'eſt-à-dire, qu'en général a = b, *ſi l'on a* . . . . . a : c : : b : c.

Ce principe eſt une ſuite évidente du premier; car les conſéquens c, c étant égaux, les antécédens a, b le ſont néceſſairement.

313. *Troiſieme principe.*

Deux raiſons ſont égales entr'elles lorſqu'elles ſont

égales chacune à une troiſieme ; c'eſt-à-dire, que ſi l'on a . . . . . $\left\{\begin{matrix} a:b \\ e:f \end{matrix}\right\} :: c:d$,

on conclura . . . . . $a:b::e:f$.

Car l'expoſant quelconque de la raiſon $c:d$ étant ſuppoſé r, les raiſons $a:b$, $e:f$ ne peuvent être égales chacune à cette troiſieme raiſon $c:d$, ſans avoir le même expoſant r : ainſi elles ſont égales.

314. *Quatrieme principe.*

Si les raiſons de deux ſuites ſont égales aux raiſons d'une troiſieme ſuite chacune à chacune ; c'eſt-à-dire, la premiere de chacune des deux premieres ſuites à la premiere de la troiſieme ſuite, la ſeconde à la ſeconde, ainſi de ſuite, les raiſons qui compoſent les deux premieres ſuites ſont égales chacune à chacune ; c'eſt-à-dire,

que ſi l'on a $\left\{\begin{matrix} {}^{1}a:b, {}^{2}c:d, {}^{3}e:f \\ {}^{1}p:q, {}^{2}r:s, {}^{3}t:v \end{matrix}\right\} :: {}^{1}A:B, {}^{2}C:D, {}^{3}E:F,$

on aura . . $^{1}a:b, {}^{2}c:d, {}^{3}e:f :: {}^{1}p:q, {}^{2}r:s, {}^{3}t:v$.

Car la premiere raiſon dans la premiere & ſeconde ſuite étant égale à la premiere raiſon dans la troiſieme ſuite, il eſt néceſſaire (313) que la premiere raiſon de la premiere ſuite ſoit égale à la premiere raiſon de la ſeconde ſuite.

La ſeconde raiſon dans la premiere & ſeconde ſuite étant égale à la ſeconde raiſon dans la troiſieme ſuite, la ſeconde raiſon de la premiere ſuite ſera encore égale à la ſeconde raiſon de la ſeconde ſuite, & ainſi des autres. Donc les raiſons correſpondantes des deux premieres ſuites ſeront égales.

ARTICLE II.

Propriétés des raiſons géométriques ſimples & compoſées.

PROPOSITION I.

315[a]. *L'antécédent de la raiſon géométrique eſt égal au produit du conſéquent multiplié par l'expoſant.*

C'eſt-à-dire, qu'en général en déſignant par r *l'expoſant quelconque entier ou fractionnaire de la raiſon* a : b, *on aura* a = br.

DÉMONSTRATION.

Dans la diviſion le dividende eſt égal au produit du quotient multiplié par le diviſeur (n°. 54) : or la raiſon géométrique eſt une diviſion de l'antécédent par le conſéquent, & le quotient de cette diviſion eſt l'expoſant de la raiſon. Donc, &c.

CONSÉQUENCES.

1°. *La raiſon géométrique quelconque* a : b, *pourra, en nommant* r *l'expoſant, ſe changer en celle-ci* br : b.

2°. *Une proportion géométrique quelconque* a : b :: c : d, *pourra, en nommant* r *l'expoſant de chaque raiſon, ſe changer en celle-ci* br : b :: dr : d.

PROPOSITION II.

315[b]. *Le rapport de deux grandeurs reſte le même lorſque l'on multiplie ces deux grandeurs par une même quantité.*

C'eſt-à-dire, en général, ſi r *eſt l'expoſant de la raiſon* a : b, *la quantité* r *ſera encore l'expoſant de la raiſon* am : bm, *laquelle eſt compoſée des mêmes grandeurs* a *&* b *multipliées par la même quantité* m.

DÉMONSTRATION.

La quantité r étant l'expoſant de la raiſon $a : b$, cette raiſon pourra ſe changer en celle-ci (n°. 315) $br : b$, & la raiſon $am : bm$ deviendra encore $brm : bm$.

Or en diviſant l'antécédent brm par le conſéquent bm, on a $\frac{brm}{bm} = r$.

Donc le rapport de deux grandeurs multipliées chacune par une même grandeur, eſt le même qu'avant la multiplication.

CONSÉQUENCE.

316. *Le rapport de deux grandeurs* a, b *eſt le même que celui de leurs doubles, leurs triples, leurs quadruples, &c.*

C'eſt-à-dire, que l'on a $a : b :: \begin{cases} 2a : 2b \\ 3a : 3b \\ 4a : 4b. \end{cases}$

Car les doubles, les triples, les quadruples, & en général les équimultiples de deux grandeurs ne ſont autre choſe que ces grandeurs multipliées par une même quantité.

PROPOSITION III.

317. *Le rapport de deux grandeurs reſte le même lorſqu'on les diviſe chacune par une même quantité.*

C'eſt-à-dire, qu'en général ſi r *eſt l'expoſant de la raiſon* a : b, *la quantité* r *ſera encore l'expoſant de la raiſon* $\frac{a}{m} : \frac{b}{m}$, *laquelle eſt compoſée des mêmes grandeurs* a, b *diviſées par la même quantité* m.

DÉMONSTRATION.

La quantité r étant l'expoſant de la raiſon $a : b$,

cette raiſon pourra ſe changer en celle-ci (n°. 249) $br : b$, & la raiſon $\frac{a}{m} : \frac{b}{m}$ deviendra $\frac{br}{m} : \frac{b}{m}$.

Or en diviſant l'antécédent $\frac{br}{m}$ par le conſéquent $\frac{b}{m}$, on a (n°. 104) $\frac{brm}{bm} = r$.

Donc le rapport de deux grandeurs diviſées chacune par une même quantité, eſt le même qu'avant la diviſion.

CONSÉQUENCE.

318. *Le rapport de deux grandeurs* a, b *eſt le même que celui de leurs moitiés, leurs tiers ou leurs quarts, &c.*

C'eſt-à-dire, que l'on a . . . . . a : b :: $\begin{cases} \frac{a}{2} : \frac{b}{2} \\ \frac{a}{3} : \frac{b}{3} \\ \frac{a}{4} : \frac{b}{4} \end{cases}$

Car les moitiés, les tiers, les quarts, & en général les parties ſemblables de deux grandeurs ne ſont autres choſes que ces grandeurs diviſées chacune par les mêmes nombres; à ſavoir, par 2 pour leurs moitiés, par 3 pour leurs tiers, &c.

PROPOSITION IV.

319. *L'expoſant d'une raiſon compoſée de tant de raiſons que l'on voudra, eſt égal au produit des expoſans des raiſons ſimples.*

C'eſt-à-dire, en général, qu'étant données les raiſons ſimples . . . . . . $\begin{cases} a : b \\ c : d \\ e : f \end{cases}$

telles que l'expoſant de la premiere ſoit p, q *celui de la ſeconde, &* r *celui de la troiſieme.*

Si l'on fait la raiſon compoſée ace : bdf, *l'expoſant de cette raiſon ſera le produit* pqr *des expoſans ſimples* p, q, r.

DÉMONSTRATION.

L'expoſant de la raiſon . . . . . $a : b$, étant p, on pourra la changer (n°. 315[a]) en celle-ci . . . . . $bp : b$.

L'expoſant de la raiſon . . . . . $c : d$, étant q, on pourra la changer en celle-ci . . $dq : d$.

L'expoſant de la raiſon . . . . . $e : f$, étant r, on pourra la changer en celle-ci . . . $fr : f$.

Et ſi dans la raiſon compoſée . . . . $ace : bdf$, on met bp à la place de a, dq à la place de c, & fr à la place de e, elle deviendra $bpdqfr : bdf$.

Or en diviſant l'antécédent $bpdqfr$ par le conſéquent bdf, il viendra pour quotient, c'eſt-à-dire, pour l'expoſant de la raiſon compoſée, la quantité pqr égale au produit des expoſans ſimples p, q, r.

Donc l'expoſant de la raiſon compoſée eſt égal au produit des expoſans des raiſons ſimples.

PROPOSITION V.

320. *L'expoſant d'une raiſon doublée eſt le quarré de l'expoſant des raiſons égales dont cette raiſon doublée eſt formée.*

C'eſt-à-dire, qu'en ſuppoſant que les raiſons $\begin{cases} a : b \\ c : d, \end{cases}$ *ſont égales, & que l'expoſant de chacune ſoit* r, *ſi l'on fait la raiſon doublée* ac : bd, *l'expoſant de cette raiſon ſera* r^2.

DÉMONSTRATION.

La raiſon doublée $ac : bd$ étant formée de la multiplication des raiſons ſimples $a : b$, $c : d$, ſon expoſant ſera le produit de l'expoſant de la raiſon $a : b$, multiplié par l'expoſant de la raiſon $c : d$ (n°. 319).

Mais les deux raiſons $a : b$, $c : d$ étant ſuppoſées

égales, c'eſt-à-dire ayant des expoſans égaux & déſignés chacun par r, le produit $r \times r$ de ces expoſans, donne le quarré r^2 de l'expoſant ſimple r. Donc, &c.

CONSÉQUENCES.

321[d]. 1°. *L'expoſant de la raiſon des quarrés de deux grandeurs eſt le quarré de l'expoſant de la raiſon ſimple de ces deux grandeurs.*

C'eſt-à-dire, qu'en général ſi r *eſt l'expoſant de la raiſon* a : b, r² *ſera l'expoſant de la raiſon* a² : b², *laquelle eſt compoſée des quarrés des grandeurs* a, b.

Pour s'en convaincre, on conſidérera que la raiſon $a^2 : b^2$ eſt une raiſon doublée formée de la multiplication des raiſons égales $a : b$, $a : b$.

Or l'expoſant de la raiſon doublée eſt le quarré de l'expoſant commun des raiſons égales dont elle eſt formée (n°. 320). Donc, &c.

2°. *En réuniſſant cette conſéquence & la propoſition* (n°. 320), *on conclura qu'étant données deux raiſons égales* . . . . . $\begin{cases} a : b \\ c : d, \end{cases}$ *le produit des antécédens & le produit des conſéquens ſeront entr'eux comme les quarrés des termes de l'une des raiſons propoſées.*

C'eſt-à-dire, que l'on aura . . $ac : bd :: \begin{cases} a^2 : b^2 \\ c^2 : d^2. \end{cases}$

Car l'expoſant de la raiſon doublée $ac : bd$, formée du produit des antécédens & du produit des conſéquens des deux raiſons égales propoſées, eſt le quarré de l'expoſant de l'une de ces raiſons ſimples (n°. 320).

Et l'expoſant de la raiſon doublée $a^2 : b^2$, ou $c^2 : d^2$, formée des quarrés des termes de l'une ou l'autre des raiſons ſimples, eſt auſſi le quarré du même expoſant ſimple (n°. 321[d]).

Donc

Donc les raiſons $ac : bd$, $a^2 : b^2$, $c^2 : d^2$, ont le même expoſant, & par conſéquent elles ſont égales.

PROPOSITION VI.

321[b]. *L'expoſant de la raiſon triplée eſt le cube de l'expoſant des raiſons égales dont cette raiſon triplée eſt formée.*

C'eſt-à-dire, qu'en ſuppoſant que les raiſons $\begin{cases} a : b \\ c : d \\ e : f \end{cases}$ *ſont égales, & que l'expoſant de chacune eſt* r, *ſi on multiplie enſemble les antécédens, & enſemble les conſéquens, on aura* r^3 *pour l'expoſant de la raiſon triplée* ace : bdf.

DÉMONSTRATION.

La raiſon $ace : bdf$ étant formée par la multiplication des trois raiſons $a : b$, $c : d$, $e : f$, ſon expoſant ſera le produit des expoſans de ces trois raiſons propoſées (n°. 319) : mais les trois raiſons étant égales, c'eſt-à-dire, ayant des expoſans égaux & déſignés chacun par r, le produit $r \times r \times r$ de ces trois expoſans eſt égal au cube r^3 de l'expoſant r des raiſons ſimples.

Donc l'expoſant de la raiſon triplée eſt le cube de l'expoſant des raiſons ſimples dont cette raiſon triplée eſt formée.

CONSÉQUENCE.

322. *L'expoſant de la raiſon des cubes de deux grandeurs eſt le cube de l'expoſant de la raiſon ſimple de ces grandeurs.*

C'eſt-à-dire, qu'en général ſi r *eſt l'expoſant de la raiſon* a : b, r^3 *ſera l'expoſant de la raiſon* $a^3 : b^3$, *laquelle eſt compoſée des cubes des grandeurs* a, b.

Pour s'en convaincre, on considérera que la raison $a^3 : b^3$ est une raison triplée formée par la multiplication des trois raisons égales $a : b$, $a : b$, $a : b$.

Or on vient de démontrer que l'exposant de la raison triplée est le cube de l'exposant commun des raisons égales dont cette raison triplée est formée (n°. 321[b]). Donc, &c.

ARTICLE III.

Propriétés des proportions géométriques.

PROPOSITION PREMIERE ET FONDAMENTALE.

Dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Et réciproquement, si quatre grandeurs donnent le produit des extrêmes égal à celui des moyens, elles sont en proportion géométriques.

PREMIERE PARTIE.

323. Dans la proportion $8 : 4 :: 6 : 3$, on a évidemment $8 \times 3 = 4 \times 6$; c'est-à-dire, le produit des extrêmes égal à celui des moyens.

Pour concevoir pourquoi cette égalité doit se trouver, comme on le voit, dans l'exemple proposé, on considérera 1°. que le premier antécédent 8 étant double du premier conséquent 4, si l'on vient à multiplier 8 & 4 par le même second extrême 3, le produit 8×3 des extrêmes sera double du produit 4×3 des conséquens.

On considérera 2°. que les nombres 8, 4, 6, 3 étant proportionnels par supposition, le second antécédent 6 sera aussi double de son conséquent 3, d'où l'on conclura qu'en multipliant 6 & 3 par le premier

moyen 4 le produit 6×4 des moyens ſera double du produit 3×4 des conſéquens.

Ainſi dans l'exemple propoſé le produit des extrêmes & celui des moyens ſont chacun double du produit des conſéquens.

Et par conſéquent $8 \times 3 : 3 \times 4 :: 6 \times 4 : 3 \times 4$; mais dans une proportion, lorſque les conſéquens ſont égaux, les antécédens le ſont auſſi (n°. 245).

Donc $8 \times 3 = 6 \times 4$.

Il eſt donc clair pourquoi dans l'exemple propoſé le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens.

Pour démontrer que la même égalité doit ſe trouver dans toutes les proportions géométriques, on ſuppoſera la proportion quelconque $a : b :: c : d$, *& l'on fera voir que les grandeurs* a, b, c, d, *étant ſuppoſées proportionnelles, il eſt néceſſaire que le produit des extrêmes ſoit égal à celui des moyens, c'eſt-à-dire que l'on ait* $ad = bc$.

DÉMONSTRATION.

Puiſqu'une proportion eſt l'égalité de deux raiſons, il eſt évident que ſi dans la proportion $a : b :: c : d$, l'expoſant quelconque, entier ou fractionnaire, de la raiſon $a : b$ eſt déſigné par r, la ſeconde raiſon $c : d$ aura le même expoſant r, & la proportion propoſée ſe changera (n°. 315) en celle-ci $br : b :: dr : d$.

Or ſi dans cette nouvelle proportion on fait le produit des extrêmes & celui des moyens, on aura évidemment $brd = bdr$.

Donc en mettant dans cette équation a à la place de br dans le premier membre, & c à la place de dr dans le ſecond membre, on aura $ad = bc$. Ce qu'il falloit démontrer.

SECONDE PARTIE.

324. *Si quatre grandeurs* a, b, c, d, *ſont telles qu'en faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, on ait* ad = bc, *on aura* a : b :: c : d.

DÉMONSTRATION.

Si la raiſon $a : b$ des deux premieres grandeurs propoſées ayant un expoſant quelconque déſigné par r, la raiſon $c : d$ de la troiſieme à la quatrieme avoit un expoſant plus petit ou plus grand que r, en déſignant le ſecond expoſant par p, & en mettant à la place de a dans la raiſon $a : b$ ſa valeur br, & à la place de c dans la raiſon $c : d$ ſa valeur dp, les grandeurs propoſées deviendront, ſans changer de valeur, $br : b$, $dp : d$.

Et en faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, on aura évidemment à cauſe de r plus petit ou plus grand que p, $brd <$ ou $> bdp$; c'eſt-à-dire, que le produit des extrêmes ſeroit plus petit ou plus grand que le produit des moyens : ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Donc toutes les fois que quatre grandeurs donnent le produit des extrêmes égal à celui des moyens, il y a de la contradiction à ſuppoſer que la raiſon de la premiere de ces grandeurs à la ſeconde n'eſt pas égale à la raiſon de la troiſieme à la quatrieme. Donc ces quatre grandeurs ſont proportionnelles.

CONSÉQUENCES.

325. 1°. *Dans toute proportion géométrique continue, le produit des extrêmes eſt égal au quarré de la moyenne.*

Dans la proportion . . . . . $\therefore 8 : 4 : 2$,
on a évidemment . . . . . $8 \times 2 = 4 \times 4$;
en général, ſi l'on a . . . . . $\therefore a : b : c$,
on pourra conclure . . . . . $ac = b^2$.

Car la proportion continue $\therefore a : b : c$ peut être exprimée, comme toute proportion géométrique, de cette forte $a : b :: b : c$.

Or dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens (n°. 323).

Donc $ac = b \times b = b^2$.

326. 2°. *Toutes les fois que l'on a une proportion géométrique* a : b :: c : d, *on peut en déduire une équation* ad = bc, *en prenant pour l'un des membres le produit* ad *des extrêmes, & pour l'autre le produit* bc *des moyens* (n°. 323).

Et réciproquement, toutes les fois que l'on aura une équation, on pourra en déduire une proportion en prenant pour extrêmes les deux produiſans du produit qui fait l'un des membres, & pour moyens les deux produiſans de l'autre membre.

Par exemple, étant donnée l'équation $ad = bc$, on pourra en déduire la proportion $a : b :: c : d$.

Etant donnée l'équation . . . $ax = b + d$, on en tirera la proportion . . . $b + d : a :: x : 1$.

Pareillement étant donnée l'équation $x = ab$, on pourra en tirer l'équation . . . $1 : a :: b : x$.

PROPOSITION II.

327. *Si quatre grandeurs ſont en proportion, il y aura toujours proportion en alternant, en permutant, en compoſant, en ſouſtrayant; c'eſt-à-dire, qu'en général ſi l'on a* a : b :: c : d, *on aura :*

1°. *En alternant* . . . . $a : c :: b : d$.

2°. *En permutant* . . . $b : a :: d : c$.

3°. *En compoſant* . . . $\begin{cases} a : b + a :: c : d + c \\ a + b : b :: c + d : d \end{cases}$

4°. *En ſouſtrayant* . . . . $\begin{cases} a : b - a :: c : d - c \\ a - b : b :: c - d : d \end{cases}$

DÉMONSTRATION,

Il y a proportion lorſque le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens (n°. 324); ainſi il ſuffit de faire voir que dans chacun des changemens propoſés, il y a égalité entre le produit des extrêmes & celui des moyens.

Par la ſuppoſition . . . . . $a : b :: c : d$,
& par conſéquent . . . . . $ad = bc$.

Mais dans le premier & ſecond changement, le produit des extrêmes & celui des moyens ſont encore bc, ad.

Dans le troiſieme & le quatrieme changement, le produit des extrêmes & celui des moyens ſont encore les produits bc, ad augmentés ou diminués chacun du produit bd des conſéquens, ou du produit ac des antécédens.

Donc en alternant dans une proportion, ou en permutant, ou en compoſant, ou en ſouſtrayant, le produit des extrêmes eſt toujours égal à celui des moyens; & par conſéquent la proportion ſubſiſte malgré ces changemens.

CONSÉQUENCES.

328. *Si on alterne dans les proportions* . . . . . $\begin{cases} a : b+a :: c : d+c, \\ a+b : b :: c+d : d \\ a : b-a :: c : d-c \\ a-b : b :: c-d : d, \end{cases}$

on aura encore . . . . . $\begin{cases} a : c :: b+a : d+c \\ a+b : c+d :: b : d \\ a : c :: b-a : d-c \\ a-b : c-d :: b : d; \end{cases}$

ce qui montre que dans la proportion géométrique la ſomme des deux premiers termes, & la ſomme des deux derniers termes, ou la différence des deux premiers ter-

res, & la différence des deux derniers, ſont entr'elles comme les antécédens, ou comme les conſéquens.

PROPOSITION III.

329. *Si l'on multiplie ou ſi l'on diviſe les termes d'une proportion par des grandeurs égales, ou par des grandeurs proportionnelles, les produits ou les quotiens ſeront encore en proportion.*

C'eſt-à-dire, qu'en général ſi l'on a a:b::c:d, *on aura en multipliant ou en diviſant par la même quantité* m.

$$\begin{cases} 1^{\circ}.\ am : bm :: cm : dm \\ 2^{\circ}.\ \frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: \frac{c}{m} : \frac{d}{m}, \end{cases}$$

& en multipliant ou en diviſant par les termes correſpondans de la proportion . . e:f::g:h.

$$\begin{cases} 3^{\circ}.\ ae : bf :: cg : dh \\ 4^{\circ}.\ \frac{a}{e} : \frac{b}{f} :: \frac{c}{g} : \frac{d}{h}. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION.

Il y a proportion lorſque le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens (n°. 324). Il ſuffira donc de faire voir qu'après chacune des opérations propoſées le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens. Or par la ſuppoſition,

$a : b :: c : d$
$e : f :: g : h$ & par conſéquent (n°. 323) $\begin{cases} ad = bc \\ eh = fg. \end{cases}$

Il eſt encore évident qu'en multipliant ou en diviſant chaque membre de la premiere équation $ad=bc$ par la même quantité m^2, on aura :

$$1^{\circ}.\ adm^2 = bcm^2.$$

$$2^{\circ}.\ \frac{ad}{m^2} = \frac{bc}{m^2}.$$

Et qu'en multipliant ou en diviſant chaque membre de la premiere équation $ad=bc$ par le membre cor-

reſpondant de la ſeconde équation $eh=fg$, on aura encore,

$$3^{o}.\ adeh=bcfg.$$

$$4^{o}.\ \frac{ad}{eh}=\frac{bc}{fg}.$$

Car des grandeurs égales multipliées ou diviſées par des grandeurs égales, donnent des produits ou des quotiens égaux.

Mais les membres de l'équation $adm^{2}=bcm^{2}$, repréſentent le produit des extrêmes & celui des moyens dans la premiere opération propoſée.

Les membres de l'équation $\frac{ad}{m^{2}}=\frac{bc}{m^{2}}$ repréſentent le produit des extrêmes & celui des moyens dans la ſeconde des opérations propoſées.

Les membres de l'équation $adeh=bcfg$ repréſentent le produit des extrêmes & celui des moyens dans la troiſieme des opérations propoſées.

Les membres de l'équation $\frac{ad}{eh}=\frac{bc}{fg}$ repréſentent le produit des extrêmes & celui des moyens dans la quatrieme des opérations propoſées.

Donc lorſque l'on diviſe ou que l'on multiplie les termes d'une proportion par des grandeurs égales ou par des grandeurs proportionnelles, le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens, & par conſéquent il y a proportion après ces multiplications ou ces diviſions.

PROPOSITION IV.

329[b]. *Quatre grandeurs étant en proportion leurs puiſſances de même degré, ou leurs racines de même degré ſont auſſi en proportion.*

C'eſt-à-dire, qu'en général ſi l'on a a : b :: c : d, *& que l'on déſigne par* n *l'expoſant de la puiſſance du*

degré que l'on voudra, & par $\sqrt[n]{\ }$ *l'exposant de la racine du degré que l'on voudra, on aura :*

$$1^{\circ}.\ a^n : b^n :: c^n : d^n.$$

$$2^{\circ}.\ \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}.$$

DÉMONSTRATION.

Il suffira de faire voir que dans les deux changemens proposés, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens (n°. 324).

Par la supposition . . . . . $a : b :: c : d$, par conséquent (n°. 323) . . . . $ad = bc$.

Il est encore évident qu'en élevant à la puissance n, ou en abaissant à la racine n chaque membre de l'équation $ad = bc$, on aura encore,

$$1^{\circ}.\ a^n d^n = b^n c^n,$$

$$2^{\circ}.\ \sqrt[n]{ad} = \sqrt[n]{bc}.$$

Car deux grandeurs égales ont leurs puissances de même degré égales, & leurs racines de même degré égales.

Mais les membres de l'équation $a^n d^n = b^n c^n$ représentent le produit des extrêmes & celui des moyens dans les grandeurs proportionnelles a, b, c, d, élevées à la même puissance n.

Les membres de l'équation $\sqrt[n]{ad} = \sqrt[n]{bc}$ représentent le produit des extrêmes & celui des moyens dans les grandeurs proportionnelles a, b, c, d abaissées à la racine n.

Donc lorsque l'on éleve des grandeurs proportionnelles à des puissances de même degré, ou qu'on les abaisse à des racines de même degré, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens après ces opérations, & par conséquent il y a proportion.

PROPOSITION V.

329^c. *Deux proportions ayant le même expoſant, ſi l'on ajoute les termes de la premiere avec les termes correſpondans de la ſeconde, les ſommes ſeront encore en proportion.*

C'eſt-à-dire, qu'en ſuppoſant le même expoſant aux proportions . . . . . $\begin{cases} a : b :: c : d \\ e : f :: g : h, \end{cases}$ *ſi l'on ajoute enſemble leurs termes correſpondans, on aura encore* a + e : b + f :: c + g : d + h.

DÉMONSTRATION.

On établira cette proportion en faiſant voir que le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens (n°. 324).

C'eſt-à-dire, que $ad+ed+ah+eh=bc+fc+bg+fg$, puiſque l'on ſuppoſe le même expoſant dans les proportions . . . . . $\begin{cases} a : b :: c : d \\ e : f :: g : h, \end{cases}$

on aura $\begin{cases} a : b :: c : d \\ c : d :: e : f \\ e : f :: g : h \\ g : h :: a : b \end{cases}$ & par conſéquent (n°. 323) . . . . $\begin{cases} 1°.\ ad = bc \\ 2°.\ ed = cf \\ 3°.\ eh = fg \\ 4°.\ ah = bg. \end{cases}$

Donc ajoutant enſemble les premiers membres de ces équations, & enſemble les ſeconds membres, on aura $ad + ed + eh + ah = bc + cf + fg + bg$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VI.

330. *Dans une ſuite de rapports égaux la ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens comme chaque antécédent eſt à ſon conſéquent.*

C'eſt-à-dire, que ſi l'on a a : b :: c : d :: e : f :: g : h,

on aura en faiſant la ſomme des antécédens & celle des conſéquens, $a+c+e+g : b+d+f+h :: a : b$.

DÉMONSTRATION.

Cette propoſition ſera encore démontrée ſi l'on fait voir que le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens (n°. 324).

C'eſt-à-dire, que $ab+bc+be+bg=ab+ad+af+ah$, ou ſimplement que $bc+be+bg=ad+af+ah$.

Par la ſuppoſition,

$a : b :: c : d$
$a : b :: e : f$ & par conſéquent (n°. 323) $\begin{cases} 1°.\ ad=bc \\ 2°.\ af=be \\ 3°.\ ah=bg. \end{cases}$
$a : b :: g : h$

Donc en ajoutant enſemble les premiers membres, & enſemble les ſeconds membres de ces équations, on aura $bc+be+fg=ad+af+ah$. Ce qu'il falloit démontrer.

ARTICLE IV.

Problêmes ſur les proportions.

PROBLÊME I.

331. *Les deux premiers termes* a, b *d'une proportion géométrique continue étant donnés, trouver le troiſieme.*

SOLUTION.

Que le troiſieme proportionnel cherché, ſoit nommé . . . . . y,
on aura cette proportion continue . . . $\div a : b : y$;
d'où l'on conclura (n°. 325) . . . . $ay=bb$.

Et en diviſant chaque membre de cette équation par le multiplicateur a de l'inconnue y, on aura . . . . . $y=\frac{bb}{a}$.

Ce qui montre que le troiſieme terme d'une proportion continue géométrique, eſt égal au quarré de la moyenne proportionnelle, diviſé par le premier terme.

PROBLÊME II.

332. *Les extrêmes* a, c *d'une proportion géométrique continue étant donnés, trouver la moyenne proportionnelle.*

SOLUTION.

Que la moyenne proportionnelle cherchée, ſoit nommée . . . . . y,
on aura cette proportion continue . . $\div\div a : y : c$;
d'où l'on conclura (n°. 325) . . . . $y^2 = ac$.

Et en extrayant la racine quarrée de chaque membre de cette équation, il viendra . . . $y = \sqrt{ac}$.

Ce qui montre que la moyenne d'une proportion géométrique continue eſt égale à la racine quarrée du produit des extrêmes.

PROBLÊME III.

333. *Connoiſſant les trois premiers termes* a, b, c *d'une proportion géométrique, connoître le quatrieme.*

SOLUTION.

Que le quatrieme proportionnel cherché, ſoit nommé . . . . . y,
on aura cette proportion . . . . $a : b :: c : y$;
d'où l'on conclura (n°. 323) . . . $ay = bc$.

Et en diviſant chaque membre de cette équation par le multiplicateur a de l'inconnue, il viendra . . . . . $y = \frac{bc}{a}$.

Ce qui montre que le quatrieme terme d'une pro-

portion géométrique eſt égal au produit des moyens diviſé par le premier extrême.

L'opération par laquelle on détermine le quatrieme terme d'une proportion géométrique dont on connoît les trois premiers termes, ſe nomme *regle de trois directe*, laquelle peut être ſimple ou compoſée.

Regle de trois directe ſimple.

334. La regle de trois directe ſimple a pour objet de déterminer le quatrieme terme d'une proportion géométrique, dont les trois premiers termes ſont connus & ſimples: on appliquera cette regle à la ſolution des queſtions ſuivantes.

EXEMPLE I.

32 aunes de drap ont coûté 320 livres, combien coûteront 20 aunes du même drap?

Comme le prix 320 liv. des 32 aunes de drap, & le prix inconnu des 20 aunes du même drap doivent être directement proportionnels aux deux nombres d'aunes 32 & 20, en nommant x le prix cherché, la queſtion propoſée donnera cette proportion $32^{\text{aunes}} : 20^{\text{aunes}} :: 320^{\text{liv.}} : x^{\text{liv.}}$

Mais le quatrieme terme d'une proportion géométrique, dont les trois premiers termes ſont donnés, eſt égal au produit des moyens diviſé par le premier extrême (n°. 333). Donc on aura le prix x inconnu des 20 aunes en multipliant enſemble les moyens 320 liv. & 20 aunes, & en diviſant le produit par le premier extrême 32.

Avant que de faire l'opération, il eſt une remarque eſſentielle à faire touchant la maniere de conſidérer les termes connus d'une regle de trois directe.

1°. En reprenant la queſtion propoſée, on voit par la proportion $32^{\text{aunes}} : 20^{\text{aunes}} :: 320^{\text{liv.}} : x^{\text{liv.}}$ que les

nombres 32 aunes & 20 aunes, qui ſont le premier & le troiſieme terme dans l'ordre de l'énoncé de la queſtion, n'influent ſur le terme cherché qu'en ce que par le rapport géométrique qui eſt entr'eux, ils déterminent le rapport du prix connu 320 livres des 32 aunes de drap au prix x des 20 aunes du même drap : ainſi il faudra conſidérer le premier & le troiſieme terme de la regle de trois directe propoſée, comme des nombres abſolus, & comme ſi la queſtion étoit propoſée ainſi :

Si 32 unités coûtent 320 livres, combien 20 unités coûteront-elles ?

2°. Le quatrieme terme x étant de même eſpece que le terme 320 liv. on obſervera dans la multiplication des moyens de prendre pour le multiplicande le terme 320 liv. qui eſt le ſecond dans l'ordre de l'énoncé de la queſtion, & pour multiplicateur le terme 20 qui eſt le troiſieme auſſi dans l'ordre de l'énoncé de la queſtion.

Venant à préſent à l'opération, on multipliera 320 liv. par 20; ce qui produira 6400 liv. On diviſera le produit par le premier terme 32, ce qui donnera 200 liv. pour le quotient, c'eſt-à-dire, pour le prix cherché des 20 aunes de drap.

REMARQUE.

335. *Comme dans toutes les regles de trois directes, dont les termes ſont concrets, on peut faire les mêmes raiſonnemens que ceux que l'on a fait dans l'exemple précédent, on établira la regle générale qui ſuit. Lorſqu'une queſtion donnera les trois premiers termes d'une proportion géométrique, & que ces termes ſeront concrets, on regardera comme abſolus les termes qui ſont le premier & le troiſieme dans l'ordre de l'énoncé de la queſtion; on multipliera le ſecond terme de l'énoncé*

par le troiſieme, & l'on diviſera enſuite le produit par le premier.

EXEMPLE II.

Pour 320 livres on a eu 32 aunes de drap, combien pour 200 livres aura-t'on d'aunes du même drap?

Pour faire cette regle, on conſidérera le premier & le troiſieme terme comme des nombres abſolus; c'eſt-à-dire, que l'on réduira la queſtion à cet énoncé: Pour 320 unités on a eu 32 aunes de drap, combien pour 200 unités aura-t'on d'aunes du même drap?

On multipliera le ſecond terme 32 aunes par le troiſieme 200, ce qui donnera 6400 aunes; l'on diviſera enſuite ce produit par le premier terme 320, & l'on aura 20 aunes pour le quotient, c'eſt-à-dire, pour le quatrieme terme demandé.

336. Lorſque dans une regle de trois directe le premier & le troiſieme terme qui ſont toujours de la même eſpece, auront des unités de différentes valeurs, on les réduira chacun à des unités de la moindre valeur; & lorſqu'ils ſeront ainſi réduits, on les conſidérera toujours comme des nombres abſolus.

EXEMPLE III.

Pour 40 livres 8 ſols 9 deniers, on a eu 3 aunes $\frac{1}{4}$ de drap, combien pour 50 livres 9 ſols 8 deniers, aura-t'on d'aunes du même drap?

Pour faire cette regle on réduira en deniers le premier terme 40 liv. 8 ſols 9 den. & le troiſieme terme 50 liv. 9 ſols 8 deniers; ce qui les changera en ceux-ci 9705 deniers, 12108 deniers, leſquels étant conſidérés comme des nombres abſolus, la queſtion propoſée ſe réduira à celle-ci:

9705 *unités ont donné 3 aunes* $\frac{1}{4}$ *de drap, combien* 12108 *unités donneront-elles d'aunes du même drap?*

On multipliera le ſecond terme 3 aunes $\frac{1}{4}$ par le troiſieme terme 12108, l'on diviſera le produit par le premier terme 9705, & le quotient ſera le quatrieme terme cherché.

Regle de trois directe compoſée.

337. *La regle de trois directe compoſée* eſt celle dont l'énoncé contient plus de trois termes connus que l'on peut réduire, par voie de multiplication, à trois termes entiérement connus qui ſoient les trois premiers termes d'une proportion dans laquelle le terme cherché ſoit le quatrieme ou un produiſant du quatrieme.

Pour réduire tous les termes connus dans la regle de trois directe compoſée, à trois termes entiérement connus, on y conſidérera deux cauſes & deux effets; on multipliera enſemble tous les nombres qui concourent à faire une premiere cauſe totale par voie de multiplication; on multipliera de même enſemble tous les nombres qui concourent à faire une ſeconde cauſe totale; on fera la même choſe à l'égard des nombres qui, multipliés enſemble, compoſeront l'effet de la premiere cauſe, ainſi qu'à l'égard des nombres qui ſeront les produiſans de l'effet de la ſeconde cauſe.

Cette réduction étant faite, on diſpoſera les termes réduits ſelon l'état de la queſtion, & ſi le nombre cherché eſt tout ſeul le quatrieme terme de la proportion, on le déterminera en opérant comme l'on a fait dans la regle de trois directe ſimple.

Que ſi le nombre demandé n'eſt qu'un produiſant du quatrieme terme, on cherchera le quatrieme terme en entier; puis, lorſqu'il ſera déterminé, on le diviſera par ſon produiſant connu, ou par le produit de ſes produiſans connus, & le quotient de cette diviſion

diviſion ſera le produiſant inconnu, c'eſt-à-dire en général, le terme demandé.

EXEMPLE I.

10 ouvriers ont fait en 5 jours, en travaillant 8 heures par jour, 30 toiſes de maçonnerie, combien 5 ouvriers pendant 6 jours, en travaillant 12 heures par jour, feront-ils de toiſes du même ouvrage?

Dans cette queſtion il y a 7 nombres donnés, & l'on cherche un huitieme nombre; à ſavoir, l'ouvrage de cinq ouvriers pendant 6 jours de 12 heures de travail chacun.

De ces 8 nombres il y en a trois; à ſavoir, 10 ouvriers, 5 jours pendant leſquels ils travaillent, & 8 heures qu'ils emploient par jour, qui compoſent par leur multiplication une premiere cauſe totale exprimée par un nombre d'heures de travail: car 10 ouvriers, pendant 5 jours, font 50 jours de travail, & 50 jours de travail de 8 heures chacun, font 8 fois 50 heures de travail. Ainſi la premiere cauſe exprimée en heures de travail, eſt égale au produit $10^{\text{ouvriers}} \times 5^{\text{jours}} \times 8^{\text{heures}}$.

La ſeconde cauſe eſt compoſée de 5 ouvriers, de 6 jours pendant leſquels ils travaillent, & de 12 heures qu'ils emploient par jour, & ſi l'on exprime encore cette ſeconde cauſe par un nombre d'heures de travail, elle ſera égale au produit des trois nombres 5 ouvriers, 6 jours, 12 heures.

L'effet de la premiere cauſe eſt un terme ſimple; à ſavoir, 30 toiſes de maçonnerie.

L'ouvrage cherché de la ſeconde cauſe eſt de même un terme ſimple.

Ainſi, pour réduire la queſtion propoſée à une regle de trois directe ſimple, on multipliera enſemble les trois nombres 10, 5, 8 heures, qui compoſent la

premiere cauſe ; ce qui donnera 400 heures de travail pour la premiere cauſe totale.

On multipliera de même enſemble les trois nombres 5, 6, 12 heures qui compoſent la ſeconde cauſe ; ce qui donnera 360 heures de travail pour la ſeconde cauſe totale.

Les cauſes étant ainſi réduites, on les diſpoſera alternativement avec leurs effets, ſelon l'état de la queſtion, & la regle propoſée ſe changera en celle-ci :

Si pendant 400 *heures on a fait* 30 *toiſes de maçonnerie, combien pendant* 360 *heures fera-t'on de toiſes du même ouvrage ?*

Or en regardant le premier & le troiſieme termes comme des nombres abſolus :

Si 400 *donnent* 30 *toiſes, combien* 360 *en donneront-elles ?*

Comme cette regle ainſi réduite eſt directe & ſimple, on déterminera le terme inconnu en opérant comme l'on a fait dans les exemples de la regle de trois ſimple, c'eſt-à-dire, en multipliant le ſecond terme 30 toiſes par le troiſieme 360, & en diviſant le produit par 400.

EXEMPLE II.

10 *ouvriers ont fait en* 12 *jours* 30 *toiſes de maçonnerie, en combien de jours* 5 *ouvriers feront-ils* 40 *toiſes du même ouvrage ?*

Dans cette queſtion il y a 5 termes donnés, & l'on en cherche un 6me ; à ſavoir, le nombre de jours qu'il faudra à 5 ouvriers pour faire 40 toiſes de maçonnerie.

On diſtinguera, comme dans l'exemple précédent, deux cauſes & deux effets.

Les deux effets ſont ſimples & connus ; à ſavoir, 30 toiſes, & 40 toiſes de maçonnerie.

La cauſe du premier effet, à ſavoir des 30 toiſes de maçonnerie, étant exprimée par un nombre de ours de travail, ſera égal au produit fait de la multiplication du nombre 12 des jours de travail par le nombre 10 des ouvriers, c'eſt-à-dire, qu'elle ſera égale à $12^{\text{jours}} \times 10, = 120^{\text{jours}}$.

La cauſe du ſecond effet, à ſavoir des 40 toiſes de maçonnerie, étant exprimée de même par un nombre de jours de travail, elle ſera égale au produit fait de la multiplication du nombre x inconnu des jours, par le nombre 5 des ouvriers, c'eſt-à-dire, qu'elle ſera égale à $5 \times x = 5x$.

Les cauſes étant ainſi réduites, on regardera la ſeconde cauſe comme étant entiérement inconnue, & diſpoſant les effets alternativement avec les cauſes, la queſtion propoſée ſe réduira à celle-ci :

Si 30 *toiſes ont été faites pendant* 120 *jours, en combien de jours* 40 *toiſes du même ouvrage ſeront-elles faites ?*

Ou à celle-ci :

Si 30 *unités donnent* 120 *jours, combien* 40 *unités donneront-elles de jours ?*

On multipliera le ſecond terme 120 jours par le troiſieme 40, ce qui donnera 4800 jours; on diviſera ce produit par le premier terme 30, & le quotient 160 ſera la cauſe totale du ſecond effet 40 toiſes.

Mais on doit avoir 160 jours $= 5x$ jours, c'eſt-à-dire, que 160 jours eſt le produit du nombre 5 des ouvriers de la ſeconde cauſe, multiplié par le nombre inconnu x des jours que doivent employer ces 5 ouvriers : ainſi pour avoir le nombre x des jours que doivent employer ces 5 ouvriers, on diviſera la cauſe totale 160 jours par le nombre 5 des ouvriers; ce qui donnera 32 jours.

REMARQUE.

Lorſque la regle de trois directe compoſée renfermera des effets compris de pluſieurs nombres, & qui pourront ſe réduire à des effets ſimples par la multiplication de ces nombres; on multipliera enſemble tous les nombres qui appartiendront au premier effet, & enſemble tous les nombres qui appartiendront au ſecond effet; & les cauſes étant ſuppoſées ſimples, ou réduites à des cauſes ſimples, la regle de trois directe compoſée ſe trouvera encore réduite à une regle directe ſimple, dans laquelle le terme inconnu ſera ou le quatrieme terme, ou un produiſant du quatrieme terme.

PROBLÊME IV.

339. *Connoiſſant le premier terme* a, *le ſecond terme* b, *& le quatrieme terme* d *d'une proportion, connoître le troiſieme.*

SOLUTION.

Que le terme cherché ſoit déſigné par . . . y, on aura cette proportion . . . . . $a:b::y:d$; d'où l'on conclura (n°. 323) . . . . . $by=ad$.

Et en diviſant chaque membre de cette équation par le moyen connu b, il viendra . . . . $y=\frac{ad}{b}$.

Ce qui montre que le troiſieme terme d'une proportion géométrique eſt égal au produit des extrêmes diviſé par le premier moyen.

L'opération par laquelle on détermine le troiſieme terme d'une proportion géométrique, dont les trois autres ſont donnés, ſe nomme *Regle de trois inverſe*, laquelle peut être ſimple ou compoſée.

Regle de trois inverſe ſimple.

340. La regle de trois *inverſe ſimple*, a pour objet

de découvrir le troiſieme terme d'une proportion dont les deux extrêmes & le premier moyen ſont des termes connus & ſimples.

On aura un exemple de cette regle dans la ſolution de la queſtion ſuivante.

EXEMPLE.

20 ouvriers emploient 24 jours pour faire un ouvrage quelconque, combien 60 ouvriers employeront-ils de jours pour faire le même ouvrage.

Comme les 20 ouvriers & les 60 ouvriers ont le même ouvrage à faire, & qu'il faut moins de tems à une plus grande cauſe, & plus de tems à une moindre cauſe pour produire le même effet, il eſt clair que l'on peut déduire de la queſtion propoſée cette proportion :

20 le premier nombre des ouvriers eſt à 60 le ſecond nombre des ouvriers, comme le tems inconnu que doit employer le ſecond nombre des ouvriers eſt au nombre 24 des jours qu'a employé le premier nombre 20 des ouvriers ; c'eſt-à-dire, $20 : 60 :: y^{\text{jours}} : 24^{\text{jours}}$.

La queſtion étant ainſi exprimée par une proportion dans laquelle l'inconnue y eſt le troiſieme terme, on aura la valeur de cette inconnue en ſuivant la formule (n°. 339) $y = \frac{ad}{b}$; c'eſt-à-dire, qu'on multipliera le quatrieme terme 24 jours par le premier terme, ce qui donnera 480 jours ; l'on diviſera enſuite ce produit par le premier moyen 60, ce qui donnera 8 jours au quotient pour le terme demandé.

Mais les extrêmes 20 ouvriers & 24 jours ſont le premier & le ſecond terme dans l'ordre de l'énoncé de la queſtion, le moyen connu 60 ouvriers en eſt le troiſieme.

On établira donc cette regle générale.

341. Lorſque l'on connoîtra par l'état de la queſtion que le terme cherché eſt un des moyens d'une proportion géométrique dont les trois autres termes ſeront donnés, on déterminera le terme demandé en multipliant le ſecond terme de la queſtion par le premier, & en diviſant le produit par le troiſieme.

Regle de trois inverſe compoſée.

342. La regle de trois inverſe eſt dite *compoſée*, lorſque ſon énoncé renferme plus de trois termes connus.

EXEMPLE.

20 ouvriers, en travaillant 6 heures par jour, font un ouvrage en 25 jours, en combien de jours 5 ouvriers feront-ils le même ouvrage en travaillant 12 heures par jour?

La maniere la plus ſimple de réſoudre cette queſtion, & toutes les ſemblables, eſt d'y diſtinguer deux cauſes qui produiſent chacune le même effet.

Dans la queſtion propoſée la premiere cauſe eſt compoſée de 20 ouvriers, de 25 jours pendant leſquels ils travaillent, & de 6 heures qu'ils emploient par jour, & il eſt évident que cette cauſe étant exprimée par un nombre d'heures de travail, ſera égale au produit des trois nombres $6^{\text{heures}} \times 25 \times 20$, ce qui donnera 3000 heures de travail.

La ſeconde cauſe étant compoſée de 8 ouvriers, du nombre inconnu x des jours pendant leſquels ils doivent travailler, & du nombre 12 des heures qu'ils emploient par jour, ſi on l'exprime par un nombre d'heures de travail, elle ſera égale au produit des trois nombres 8, x, 12 heures; c'eſt-à-dire, à $96x$ heures.

Mais deux cauſes qui produiſent des effets égaux

ſont égales : ainſi en comparant enſemble les deux cauſes réduites, on aura l'équation $96x^{\text{heures}} = 3000^{\text{heures}}$. dans laquelle, ſi on dégage l'inconnue x, il viendra . . . . . $x = \frac{3000}{96} = 31 + \frac{1}{4}$.

Ce qui montre que le nombre des jours demandés, ou le produiſant inconnu de la ſeconde cauſe eſt 31 jours $+ \frac{1}{4}$.

343. On tirera de cette ſolution la regle générale qui ſuit.

Lorſque tous les termes d'une regle de trois compoſée pourront ſe réduire, par la multiplication, à deux cauſes qui produiſent chacune le même effet, ou des effets égaux, on multipliera enſemble tous les nombres qui compoſent la premiere cauſe ; on diviſera le produit qui repréſentera la cauſe totale toute connue par le produit des produiſans donnés dans la ſeconde cauſe, & le quotient ſera le produiſant inconnu ou le terme demandé.

PROBLÊME V.

344. *Diviſer une grandeur donnée* m *en des parties* x, y, z, *&c. qui ſoient entr'elles dans la raiſon des grandeurs* a, b, c *données.*

SOLUTION.

On a par la ſuppoſition . . . $a : b : c :: x : y : z$,

ou . . . . . $\begin{cases} a : b :: x : y \\ b : c :: y : z. \end{cases}$

Donc on aura en alternant (n°. 327) $\begin{cases} a : x :: b : y \\ b : y :: c : z. \end{cases}$

Et en mettant de ſuite les rapports égaux, on aura . . . . . $a : x :: b : y :: c : z$.

Et en faiſant la ſomme des antécédens, & celle des conſéquens (n°. 339) $a + b + c : x + y + z :: \begin{cases} a : x \\ b : y \\ c : z. \end{cases}$

Et en exprimant par d la ſomme des termes a, b, c donnés, & en mettant m à la place de la ſomme $x+y+z$ des parties cherchées, il viendra :

$$d : m :: \begin{cases} a : x \\ b : y \\ c : z. \end{cases}$$

Ce qui montre que l'on partage une grandeur donnée en des parties proportionnelles à des termes donnés, en faiſant autant de regles de trois qu'il y a de parties cherchées ; chacune de ces regles de trois étant énoncée ainſi, la ſomme des termes donnés eſt à la grandeur à partager comme chacun des termes donnés eſt à la partie correſpondante cherchée.

Regle de ſociété.

345. L'opération que l'on fait pour partager une grandeur donnée en des parties proportionnelles à des termes donnés, ſe nomme *Regle de ſociété.*

On réſoudra par cette regle la queſtion ſuivante.

EXEMPLE.

Trois Marchands ont mis enſemble de l'argent dans le commerce.

Le premier a mis	4000 liv.
Le ſecond	3500
Le troiſieme	2500
La totalité de ces miſes a rapporté . .	15000

Connoître le gain de chaque Marchand.

Les cauſes des gains étant proportionnelles aux gains, il eſt évident que pour déterminer les gains de ces Marchands, il faut diviſer le gain total 15000 liv. proportionnellement aux miſes particulieres qui ſont les cauſes des gains, on ſe ſervira à ce ſujet de la for-

mule ci-deſſus (n°. 344) . . . $d : m :: \begin{cases} a : x \\ b : y \\ c : z. \end{cases}$

C'eſt-à-dire, que l'on ajoutera enſemble les miſes particulieres 4000 livres, 3500 livres, 2500 livres; ce qui donnera 10000 livres. Et nommant x le gain du premier Marchand, y le gain du ſecond, z celui du troiſieme, on fera ces regles de trois :

miſe totale. gain total.
10000 liv. : 15000 liv. ::
$\begin{cases} \text{miſe du 1er.} \\ 4000 \text{ liv.} : x = 6000 \text{ liv.} \\ \text{miſe du 2e.} \\ 3500 \text{ liv.} : y = 5250 \text{ liv.} \\ \text{miſe du 3e.} \\ 2500 \text{ liv.} : z = 3750 \text{ liv.} \end{cases}$

Lorſque l'on a déterminé les parties du nombre propoſé qui précede la derniere, ſi on retranche de ce nombre propoſé la ſomme des parties trouvées, il eſt évident que le reſte ſera la derniere partie demandée : ainſi au lieu de faire autant de regles de trois qu'il y a de parties cherchées, il ſuffira d'en faire autant moins une; c'eſt-à-dire, d'en faire autant qu'il y a de parties qui précédent la derniere; & lorſque ces regles de trois ſeront faites, on déterminera la derniere partie en retranchant du nombre propoſé à partager la ſomme des parties trouvées.

PROBLÊME VI.

346. *Connoiſſant la ſomme ou la différence de deux grandeurs, & leur rapport géométrique, connoître ces grandeurs.*

SOLUTION.

Que la premiere des deux grandeurs demandées ſoit déſignée par . . . . . x,
la ſeconde par . . . . . y,
leur ſomme par . . . . . s,

leur différence par . . . . . d,
leur rapport géométrique par . . . . $a : b$,
par la ſuppoſition on a . . . $a : b :: x : y$.

Donc on aura (n°. 327) :

En compoſant $a + b : b :: x + y : y$.
En ſouſtrayant $a - b : b :: x - y : y$.

Et ſi on met dans la premiere de ces proportions s à la place de la ſomme $x + y$, & dans la ſeconde d à la place de la différence $x - y$,

il viendra . . . . . $\begin{cases} a + b : b :: s : y \\ a - b : b :: d : y. \end{cases}$

Et la premiere de ces proportions fait connoître que la ſeconde des grandeurs demandées eſt quatrieme proportionnelle à la ſomme des deux termes du rapport donné, au ſecond terme du rapport, & à la ſomme connue des grandeurs demandées.

La ſeconde proportion fait connoître que cette même ſeconde des grandeurs demandées eſt quatrieme proportionnelle, à la différence des deux termes du rapport donné, au ſecond terme de ce rapport, & à la différence connue des deux grandeurs demandées.

Et il eſt évident que la ſeconde des grandeurs demandées étant connue, on déterminera aiſément la premiere par le moyen de la ſomme ou de la différence donnée.

SECTION II.

Propriétés des progreſſions géométriques.

DÉFINITIONS.

347. ON appelle *progreſſion géométrique*, ou ſimplement *progreſſion*, une ſuite de grandeurs telles que

chacune diviſée par celle qui la précede donne le même quotient.

Telle eſt, par exemple, la ſuite des nombres 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, &c. qui ſont tels que chacun diviſé par celui qui le précede, donne le même quotient $\frac{1}{2}$.

Pour exprimer que les termes d'une ſuite ſont en progreſſion géométrique, on met à la gauche du premier terme quatre points, deux ſupérieurs & deux inférieurs, avec une barre horizontale entre les ſupérieurs & les inférieurs, & l'on ſépare par deux points, l'un ſupérieur & l'autre inférieur, chaque terme de celui qui le précede.

Par exemple, ſi l'on ſuppoſe que les grandeurs a, b, c, d, e, f, &c. ſont en progreſſion géométrique, on l'exprime ainſi $\frac{::}{::} a : b : c : d : e : f$, &c.

La progreſſion eſt dite *croiſſante* lorſque les termes vont en augmentant.

Telle eſt la progreſſion $\frac{::}{::} \frac{1}{2} : 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$, &c.

Au contraire, la progreſſion eſt dite *décroiſſante* lorſque les termes vont en diminuant.

Telle eſt la progreſſion $\frac{::}{::} 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1 : \frac{1}{2}$, &c.

On propoſera toujours dans la progreſſion croiſſante & décroiſſante, de diviſer chaque terme par celui qui le précede; c'eſt-à-dire, le ſecond terme par le premier, le troiſieme par le ſecond, & ainſi de ſuite. Et l'on nommera *expoſant* le quotient de cette diviſion, lequel ſera évidemment toujours fractionnaire dans la progreſſion décroiſſante.

ARTICLE I.

PROPOSITION I.

348. *Dans toute progreſſion géométrique chaque terme eſt égal au premier multiplié par l'expoſant élevé à*

une puiſſance dont le degré eſt exprimé par le nombre des termes qui le précedent.

C'eſt-à-dire, qu'en général étant donnée la progreſſion croiſſante ou décroiſſante ∴ a : b : c : d : e : f, *ſi l'on exprime par* m *l'expoſant entier ou fractionnaire de cette progreſſion, on pourra la changer en celle-ci* ∴ a : am : am² : am³ : am⁴ : am⁵, *où l'on voit que le ſecond terme* am *eſt égal au premier terme* a *multiplié par la premiere puiſſance de l'expoſant* m, *le troiſieme terme* am² *égal au premier multiplié par la ſeconde puiſſance de l'expoſant* m, *& ainſi des autres.*

DÉMONSTRATION.

Dans toute diviſion le produit fait de la multiplication du quotient par le diviſeur, eſt égal au dividende (n°. 54).

Donc dans la progreſſion propoſée ∴ $a : b : c : d : e : f$, l'expoſant, c'eſt-à-dire, le quotient du ſecond terme b diviſé par le premier terme a, étant exprimé par m, le dividende b ſera égal au produit du diviſeur a multiplié par le quotient m, c'eſt-à-dire, que l'on aura . . . . . $b = am$.

Mais puiſque dans la progreſſion géométrique l'expoſant ou le quotient de chaque terme diviſé par celui qui le précede eſt conſtant, le quotient du troiſieme terme c, diviſé par le ſecond b, ſera encore m, & en multipliant le diviſeur par ce quotient, on aura . . . . . $c = bm$.

Et en mettant am à la place de b dans le produit bm, il viendra . . . . . $c = am^2$.

Le quotient du quatrieme terme d, diviſé par le troiſieme terme c, étant encore m, on aura $d = cm$.

Et en mettant am^2 à la place de c dans le produit cm, il viendra . . . . $d = am^2 m = am^3$.

On prouvera de même que le 5ᵉ terme $e = am^4$.

Que le ſixieme terme . . . . $f = am^5$,

Donc en général dans toute progreſſion géométrique, chaque terme eſt égal au premier multiplié par l'expoſant élevé à la puiſſance du degré marqué par le nombre des termes qui le précedent.

CONSÉQUENCES.

349. *Dans toute progreſſion géométrique, le quarré du premier terme eſt au quarré du ſecond terme comme le premier eſt au troiſieme; le cube ou la troiſieme puiſſance du premier terme eſt au cube ou à la troiſieme puiſſance du ſecond, comme le premier terme eſt au quatrieme; en général, une puiſſance quelconque du premier terme ſera à une puiſſance ſemblable du ſecond, comme le premier terme eſt à un autre terme qui aura avant lui autant de termes qu'il y a d'unités dans l'expoſant de la puiſſance du premier & du ſecond terme.*

C'eſt-à-dire, que ſi on a la progreſſion $\dot{\div}$ a : b : c : d : e : f, *on aura* . . . . . $\begin{cases} 1^{o}.\ a^{2} : b^{2} :: a : c, \\ 2^{o}.\ a^{3} : b^{3} :: a : d. \end{cases}$

Et en général $a^{n} : b^{n} :: a :$ *un terme dont le numero eſt* $n + 1$.

Car en nommant *m* l'expoſant entier ou fractionnaire de la progreſſion propoſée, on pourra la changer en celle-ci $\dot{\div}$ $a : am : am^{2} : am^{3} : am^{4} : am^{5}$.

Or en faiſant les quarrés des deux premiers termes de cette nouvelle progreſſion, & en comparant leur rapport avec celui du premier & du troiſieme terme, on a évidemment $a^{2} : a^{2}m^{2} :: a : am^{2}$, puiſque le produit $a^{3}m^{2}$ des extrêmes $= a^{3}m^{2}$ le produit des moyens (n°. 324).

En faiſant les cubes des deux premiers termes a, am, & en comparant leur rapport avec celui du premier & du quatrieme terme, on aura encore évidemment $a^{3} : a^{3}m^{3} :: a : am^{3}$, puiſque $a^{4}m^{3}$ produit des extrêmes $= a^{4}m^{3}$, produit des moyens. Comme

ſion $\dot{:}\dot{:}$ a:b:c:d:e:f, *& en nommant* s *la ſomme de tous les termes, on aura* . . . $s = \frac{a^2 - bf}{a - b}$.

C'eſt-à-dire, que la ſomme de tous les termes d'une progreſſion décroiſſante finie, eſt égale au quarré du premier terme a *moins le produit du ſecond terme multiplié par le dernier* f, *le tout diviſé par la différence du premier terme au ſecond.*

Car en reprenant la proportion $a-b : b :: a-f : s-a$ que l'on a trouvé pour la progreſſion décroiſſante, on aura, en faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens (n°. 323), l'équation $sa - sb - a^2 + ab = ab - bf$.

En tranſpoſant $-a^2+ab$ du premier membre (219), & en réduiſant (38), il viendra $sa - sb = a^2 - bf$.

Et en diviſant chaque membre par $a-b$, on aura enfin . . . . . $s = \frac{a^2 - bf}{a - b}$.

353. 3°. *En regardant la progreſſion* $\dot{:}\dot{:}$ a:b:c: &c. &c. f, *comme décroiſſante à l'infini, & ayant* f *pour ſon dernier terme, on aura* . . . . $s = \frac{a}{1 - \frac{b}{a}}$.

C'eſt-à-dire, que la ſomme de tous les termes d'une progreſſion qui décroît à l'infini, eſt égale au premier terme diviſé par l'unité moins l'expoſant.

Pour le démontrer, on conſidérera que le dernier terme f d'une progreſſion décroiſſante à l'infini, eſt infiniment petit, c'eſt-à-dire, que l'on ne peut l'exprimer par aucune grandeur déterminée la plus petite que l'on puiſſe aſſigner : ainſi on peut, ſans aucun inconvénient, le ſuppoſer égal à zero.

Et par conſéquent la proportion $a-b : b :: a-f : s-a$ que l'on a trouvé pour la progreſſion décroiſſante, deviendra . . . . . $a-b : b :: a : s-a$.

Et l'on aura, en faiſant le produit des extrêmes & celui

celui des moyens (n°. 323) $sa - sb - a^2 + ab = ab$.

Et en transposant $- a^2 + ab$ du premier membre

$$sa - sb = a^2.$$

Et en divisant chaque membre par $a - b$, $s = \frac{a^2}{a-b}$.

Enfin divisant par a les deux termes de la fraction

$$\frac{a^2}{a-b}.$$

$$s = \frac{a}{1 - \frac{b}{a}}.$$

ARTICLE II.

Problêmes sur les progressions géométriques.

PROBLÊME I.

354. *Connoissant le premier terme d'une progression géométrique avec l'exposant, connoître quel terme on voudra.*

SOLUTION.

Dans toute progression géométrique chaque terme est égal au premier multiplié par l'exposant élevé à une puissance dont le degré est marqué par le nombre des termes qui le précedent (n°. 348).

Donc étant donné le premier terme d'une progression géométrique avec l'exposant, on déterminera un terme quelconque dont le rang sera donné, en élevant d'abord l'exposant à une puissance dont le degré soit égal au nombre des termes qui précedent le terme demandé, puis en multipliant cette puissance de l'exposant par le premier terme.

Par exemple, que l'on propose de déterminer le quatrieme terme d'une progression géométrique croissante qui a 2 pour premier terme, & 3 pour exposant.

Comme le terme demandé est précédé de trois ter-

mes, on élevera l'expoſant 3 à la troiſieme puiſſance, ce qui donnera 27 ; on multipliera enſuite le cube 27 par le premier terme 2, ce qui produira 54 pour la valeur du quatrieme terme demandé.

Si l'on propoſe de déterminer le ſeptieme terme d'une progreſſion géométrique décroiſſante, dont le premier terme ſoit 16, & dont l'expoſant ſoit $\frac{1}{2}$.

Comme le ſeptieme terme eſt précédé de ſix termes, on élevera l'expoſant $\frac{1}{2}$ à la ſixieme puiſſance, ce qui donnera $\frac{1}{2\times2\times2\times2\times2\times2} = \frac{1}{64}$; on multipliera enſuite le terme 16 par $\frac{1}{64}$, ce qui donnera $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ pour le ſeptieme terme demandé.

PROBLÊME II.

355. *Connoiſſant le premier terme, l'expoſant & le nombre des termes d'une progreſſion finie, connoître la ſomme de tous les termes.*

SOLUTION.

La formule (n°. 351) $s = \frac{fb - aa}{b - a}$, que l'on a trouvée pour la valeur de la ſomme de tous les termes d'une progreſſion croiſſante finie, fait connoître qu'avec le premier terme, le ſecond & le dernier terme d'une progreſſion croiſſante finie, on peut déterminer la ſomme de tous les termes de cette progreſſion, en multipliant le dernier terme par le ſecond, en retranchant de ce produit le quarré du premier terme, & en diviſant enſuite le reſte par la différence du ſecond terme au premier.

La formule (n°. 351) $s = \frac{aa - bf}{a - b}$, que l'on a trouvée pour la valeur de la ſomme de tous les termes d'une progreſſion croiſſante finie, fait connoître qu'a-

vec le premier, le ſecond & le dernier terme, on peut déterminer la ſomme de tous les termes de cette progreſſion, en faiſant le quarré du premier terme, en retranchant de ce quarré le produit du dernier terme par le ſecond, & en diviſant enſuite le reſte par la différence du premier terme au ſecond.

Donc étant donnés le premier terme, l'expoſant & le nombre des termes d'une progreſſion croiſſante ou décroiſſante, il faudra, pour déterminer la ſomme de tous les termes, déterminer au préalable le ſecond & le dernier terme; ce que l'on exécutera par le moyen des données, en appliquant la ſolution du problème précédent, c'eſt-à-dire, en prenant d'abord pour le ſecond terme le produit fait de la multiplication du premier terme par la premiere puiſſance de l'expoſant.

Et en prenant enſuite pour le dernier terme le produit fait de la multiplication du premier terme par l'expoſant élevé à une puiſſance dont le degré eſt marqué par le nombre des termes diminué de l'unité, parce que le nombre des termes qui précedent le dernier, eſt le nombre de tous les termes diminué de l'unité.

PROBLÊME III.

356. *Connoiſſant le premier terme, & l'expoſant d'une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini, c'eſt-à-dire, compoſée d'une infinité de termes qui vont en diminuant, connoître la ſomme de tous ces termes.*

SOLUTION.

La formule (n°. 353) $s = \frac{a}{1 - \frac{b}{a}}$ montre que pour déterminer la ſomme de tous les termes qui compoſent une progreſſion décroiſſante à l'infini d'a-

bord retrancher de l'unité l'expoſant de la progreſſion, c'eſt-à-dire, le quotient du ſecond terme diviſé par le premier, puis diviſer par le reſte le premier terme de la progreſſion propoſée.

Ainſi, ſi on propoſe de ſommer la progreſſion décroiſſante à l'infini $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16}$, &c. dont l'expoſant eſt $\frac{1}{2}$: puiſque le ſecond terme $\frac{1}{4}$, diviſé par le premier terme $\frac{1}{2}$, donne $\frac{1}{2}$ pour quotient (n°. 104), on retranchera de 1 ou de $\frac{2}{2}$, cet expoſant $\frac{1}{2}$; ce qui donnera $\frac{1}{2}$ pour différence.

On diviſera enſuite le premier terme $\frac{1}{2}$ par la différence $\frac{1}{2}$; ce qui donnera 1 pour quotient & pour la ſomme de la progreſſion.

Si l'on propoſe de ſommer la progreſſion décroiſſante à l'infini $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27}$, &c. dont l'expoſant eſt $\frac{1}{3}$, puiſque le ſecond terme $\frac{1}{9}$ diviſé par le premier $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ (n°. 104), on retranchera de 1 ou de $\frac{3}{3}$ cet expoſant $\frac{1}{3}$; ce qui donnera $\frac{2}{3}$ pour différence.

On diviſera enſuite le premier terme $\frac{1}{3}$ par la différence $\frac{2}{3}$, ce qui donnera $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ pour le quotient & pour la ſomme de la progreſſion.

Si l'on propoſe de ſommer la progreſſion décroiſſante à l'infini $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 90 : 60 : 40 : &c. dont l'expoſant eſt $\frac{1}{3}$: puiſque le ſecond terme 60 diviſé par le premier $90 = \frac{60}{90} = \frac{6}{9} = \frac{1}{3}$, on retranchera de 1 ou de $\frac{3}{3}$ l'expoſant $\frac{1}{3}$; ce qui donnera $\frac{2}{3}$ pour différence.

On diviſera enſuite le premier terme 90 par la différence $\frac{2}{3}$; ce qui donnera $90 \times \frac{3}{2} = 270$ pour le quotient & pour la ſomme de la progreſſion.

PROBLÈME IV.

357. *Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux grandeurs données.*

SOLUTION.

Que la premiere des grandeurs données ſoit expri-

mée par . . . . . a,
la ſeconde par . . . . . b,
la premiere des moyennes demandées, par . . x,
la ſeconde par . . . . . y,
parce que l'on ſuppoſe . . . . $\div\div a : x : y : b$,
on conclura (n°. 349) . . . . $a^3 : x^3 :: a : b$.

Donc en faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens . . . . . $ax^3 = a^3b$,
en diviſant par a chaque membre de cette équation . . . . . $x^3 = a^2b$;
& extrayant la racine cubique . . . $x = \sqrt[3]{a^2b}$.

Ce qui montre que la premiere x des deux moyennes proportionnelles demandées eſt égale à la racine cubique du produit fait de la multiplication du quarré a^2 de la premiere a des grandeurs données par la ſeconde b.

Cette premiere moyenne étant déterminée, comme l'on a $\div\div x : y : b$, on aura, en mettant à la place de x ſa valeur $\sqrt[3]{a^2b}$ . . . $\div\div \sqrt[3]{a^2b} : y : b$.

Ce qui montre que l'on déterminera la ſeconde grandeur y demandée, en prenant (n°. 332) une moyenne proportionnelle entre la valeur connue de la premiere moyenne x, & la ſeconde b des grandeurs données.

CHAPITRE DIXIEME.

Des proportions & progreſſions arithmétiques, & des logarithmes.

SECTION PREMIERE.

Des proportions arithmétiques.

PREMIERE DÉFINITION.

358. LE *rapport arithmétique* de deux grandeurs, c'eſt la comparaiſon que l'on fait de ces deux grandeurs en examinant leur différence; par exemple, ſi on compare 9 avec 3, en conſidérant la différence de ces deux nombres, c'eſt-à-dire, la quantité dont 9 ſurpaſſe 3, ou dont 3 eſt ſurpaſſé par 9, cette comparaiſon eſt le rapport arithmétique de 9 à 3.

On nomme *antécédent* le terme du rapport arithmétique que l'on écrit ou que l'on nomme le premier, & l'autre s'appelle *conſéquent.*

Comme le rapport arithmétique conſiſte proprement dans la différence de l'antécédent au conſéquent, il ſuit:

1°. Qu'un rapport arithmétique n'eſt qu'une ſouſtraction indiquée dans laquelle on propoſera toujours de retrancher le moindre terme du plus grand pour avoir une différence poſitive.

Pour indiquer cette ſouſtraction, on eſt convenu d'écrire le conſéquent à la ſuite de l'antécédent, & de les ſéparer par un point; par exemple, l'expreſſion

9 . 3 eſt le rapport arithmétique indiqué de 9 à 3.

2°. Le rapport arithmétique de deux grandeurs ſe détermine en ôtant le moindre terme du plus grand; par exemple, pour déterminer le rapport arithmétique de 9 à 3, on ôtera 3 de 9, & la différence 6 ſera la valeur de ce rapport.

3°. Deux rapports arithmétiques ſont égaux lorſque les antécédens de ces deux rapports ſurpaſſent également leurs conſéquens, ou en ſont également ſurpaſſés. Ainſi les rapports arithmétiques 8 . 5, 10 . 7 ſont égaux, parce que l'antécédent de chaque rapport ſurpaſſe ſon conſéquent de la même quantité 3; & les rapports arithmétiques 3 . 9, 2 . 8 ſont auſſi égaux, parce que l'antécédent de chacun de ces rapports eſt ſurpaſſé par ſon conſéquent de la même quantité 6.

SECONDE DÉFINITION.

Une *proportion arithmétique*, c'eſt la comparaiſon de deux rapports arithmétiques égaux; ainſi les deux rapports arithmétiques égaux 8 . 5, 10 . 7, forment une proportion arithmétique. Et les deux rapports égaux 3 . 9, 2 . 8, en forment une autre.

On exprime une proportion arithmétique en écrivant de ſuite les deux rapports égaux qui la compoſent, & en les ſéparant par deux points, l'un ſupérieur & l'autre inférieur.

Par exemple, pour exprimer la proportion formée par les rapports égaux 8 . 5, 10 . 7, on écrira 8.5:10.7.

En général, ſi l'on ſuppoſe que les grandeurs a, b, c, d ſont en proportion arithmétique, on l'exprimera ainſi $a . b : c . d$.

Pour énoncer une proportion arithmétique, par exemple, celle-ci 8 . 5 : 10 . 7, on dira 8 eſt à 5 comme 10 eſt à 7.

Le premier & le quatrieme terme d'une propor-

tion arithmétique, ſe nomment les *extrêmes*; le ſecond & le troiſieme ſe nomment les *moyens*.

TROISIEME DÉFINITION.

Une proportion arithmétique *continue*, eſt une proportion arithmétique dans laquelle le conſéquent du premier rapport ſert d'antécédent dans le ſecond rapport. Telle eſt la proportion 12 . 7 : 7 . 2.

Trois grandeurs a, b, c ſont donc en proportion arithmétique continue, lorſque la premiere ſurpaſſe la ſeconde de la même quantité dont la ſeconde ſurpaſſe la troiſieme, ou lorſque la premiere eſt ſurpaſſée par la ſeconde de la même quantité dont cette ſeconde eſt ſurpaſſée par la troiſieme.

Et pour exprimer que trois grandeurs a, b, c ſont en proportion arithmétique continue, on écrit $\div a . b . c$.

Le premier & le troiſieme terme d'une proportion arithmétique continue, ſe nomment *les extrêmes*, & le ſecond terme eſt dit *la moyenne*.

ARTICLE I.

PROPOSITION.

359. *Dans toute proportion arithmétique la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens.*

Dans les proportions arithmétiques $\begin{cases} 8 . 5 : 10 . 7 \\ 5 . 8 : 7 . 10, \end{cases}$

on a évidemment . . . . . $8+7=5+10$.

C'eſt-à-dire, que dans les proportions la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens.

En général, étant donnée la proportion arithmétique quelconque . . . . . $a . b : c . d$,

on aura . . . . . $a+d=b+c$.

DÉMONSTRATION.

Lorſque deux grandeurs ſont inégales, la plus petite plus la différence, eſt égale à la plus grande.

Donc, 1°. en ſuppoſant que dans la proportion arithmétique propoſée les antécédens ſont plus grands que les conſéquens, ſi on exprime par f la même quantité quelconque dont chaque antécédent ſurpaſſe ſon conſéquent, on aura . . . . $\begin{cases} a = b + f \\ c = d + f. \end{cases}$

Et en mettant dans la proportion propoſée, à la place des antécédens a & c, leurs valeurs $b+f$, $d+f$, il viendra . . . . . $b+f . b : d+f . d.$

Or ſi on fait la ſomme des extrêmes, & celle des moyens dans cette nouvelle proportion, on aura évidemment . . . . . $b+f+d = b+d+f.$

Donc en mettant a dans le premier membre de cette équation, à la place de $b+f$, & dans le ſecond, c à la place de $d+f$, on aura encore $a+d = b+c.$

2°. Si l'on ſuppoſe que dans la proportion $a . b : c . d$, chaque antécédent eſt ſurpaſſé par ſon conſéquent de la même quantité f, on aura . . . . $\begin{cases} b = a + f \\ d = c + f. \end{cases}$

Et en mettant dans la proportion propoſée, à la place des conſéquens b, d leurs valeurs $a+f$, $c+f$, il viendra . . . . . $a . a+f : c . c+f.$

Or ſi on fait la ſomme des extrêmes, & celle des moyens dans cette nouvelle proportion, on aura évidemment . . . . . $a+c+f = a+f+c.$

Donc en mettant dans le premier membre de cette équation d à la place de $c+f$, & b à la place de $a+f$ dans le ſecond, on aura auſſi $a+d = b+c.$

CONSÉQUENCE.

360. *Dans la proportion arithmétique continue, la*

ſomme des extrêmes eſt égale au double de la moyenne.

C'eſt-à-dire, qu'en général ſi l'on ſuppoſe ÷ a . b . c, *on aura* . . . . . a + c = 2b.

Car la proportion arithmétique continue ÷ *a . b . c*, peut être exprimée comme toute proportion arithmétique de cette ſorte . . . . . *a . b : b . c.*

Mais dans toute proportion arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens (n°. 359). Donc on aura $a + c = b + b = 2b$.

ARTICLE II.

PROBLÊME.

361. *Trois termes d'une proportion arithmétique étant donnés, trouver le quatrieme.*

SOLUTION.

1°. Si les trois termes donnés ſont les trois premiers, en les déſignant par . . . . . *a, b, c*, & l'inconnue par . . . . . *y*, on aura . . . . . *a . b : c . y.*

D'où l'on conclura, en faiſant la ſomme des extrêmes & celle des moyens (n°. 359), $a + y = b + c$.

Et en tranſpoſant le terme a, il viendra $y = b + c - a$.

Ce qui montre que l'on détermine celui des extrêmes qui manque dans une proportion arithmétique, en faiſant la ſomme des moyens, & en retranchant de cette ſomme l'autre extrême.

2°. Si des trois termes donnés deux ſont les extrêmes, & l'autre l'un des moyens, en déſignant ces trois termes par . . . . . *a, b, d*, & l'inconnue par . . . . . *y*, on aura . . . . . *a . b : y . d.*

D'où l'on conclura (n°. 359) $b + y = a + d$.

Et en tranſpoſant le terme b . . . $y = a + d - b$.

Ce qui montre que l'on a celui des moyens qui manque dans une proportion, en faiſant la ſomme des extrêmes, & en retranchant de cette ſomme celui des moyens qui eſt connu.

SECTION II.

Des progreſſions arithmétiques.

DÉFINITION.

362. *LA progreſſion arithmétique* eſt une ſuite de termes qui vont tous en augmentant ou en diminuant de la même quantité.

La progreſſion arithmétique eſt dite *croiſſante* lorſque les termes qui la compoſent vont en augmentant. Telle eſt la ſuite des nombres 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c.

La progreſſion arithmétique eſt dite *décroiſſante* lorſque les termes qui la compoſent vont tous en diminuant. Telle eſt la ſuite des nombres 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1, &c.

On exprime la progreſſion arithmétique comme la proportion arithmétique continue ; par exemple, pour exprimer que tous les nombres de cette ſuite 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c. ſont en progreſſion arithmétique, on écrira ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . &c.

Dans la progreſſion arithmétique le premier & le dernier terme ſont dits *les extrêmes* de la progreſſion, & les autres termes ſont dits *les moyens*, & l'on nomme *différence* la quantité conſtante dont chaque terme augmente ou diminue par rapport à celui qui le précede.

ARTICLE I.

PROPOSITION I.

363. *Dans toute progreſſion arithmétique croiſſante chaque terme eſt égal au premier, plus la différence multipliée par le nombre des termes qui le précedent.*

Et ſi la progreſſion eſt décroiſſante, chaque terme eſt égal au premier, moins la différence de la progreſſion multipliée par le nombre des termes qui le précedent.

C'eſt-à-dire, qu'en général étant donnée la progreſſion ÷ a . b . c . d . e . f . g.

1°. *Si elle eſt croiſſante, & que la différence ſoit exprimée par* p, *on pourra la changer en celle-ci* ÷ a . a + p . a + 2p . a + 3p . a + 4p . a + 5p . a + 6p.

2°. *Si la progreſſion eſt décroiſſante, & que la différence ſoit encore* p, *on pourra la changer ainſi* ÷ a . a — p . a — 2p . a — 3p . a — 4p . a — 5p . a — 6p.

DÉMONSTRATION.

Lorſque deux grandeurs ſont inégales, la plus petite plus la différence, eſt égale à la plus grande, & la plus grande moins la différence eſt égale à la plus petite.

Donc, 1°. en ſuppoſant que la progreſſion propoſée ÷ $a . b . c . d . e . f . g$ eſt croiſſante, & que la différence eſt p, le ſecond terme b étant plus grand que le premier terme a de la quantité p, on aura $b = a + p$.

Le troiſieme terme c étant plus grand que le ſecond terme b de la même quantité p, on aura $c = b + p$.

Et comme $b = a + p$, on aura, en mettant $a + p$ à la place de b . . . $c = a + p + p = a + 2p$.

On prouvera de même que le quatrieme terme d eſt égal au premier plus trois fois la différence ; c'eſt-à-dire, que $d = a + 3p$, & ainſi de ſuite.

2°. En ſuppoſant que la progreſſion propoſée $\div a.b.c.d.e.f.g$ eſt décroiſſante, & que la différence eſt p, le ſecond terme b étant plus petit que le premier terme de la quantité p, on aura $b = a - p$.

Le troiſieme terme c étant encore plus petit que le ſecond b de la quantité p, on aura $c = b - p$; & comme $b = a - p$, on aura . . $c = a - 2p$.

On prouvera de même que le quatrieme terme d eſt égal au premier terme moins trois fois la différence; c'eſt-à-dire, que $d = a - 3p$, & ainſi des autres.

Donc dans la progreſſion arithmétique croiſſante chaque terme eſt égal au premier plus la différence multipliée par le nombre des termes qui le précedent.

Et dans la progreſſion arithmétique décroiſſante chaque terme eſt égal au premier moins la différence multipliée par le nombre des termes qui le précedent.

CONSÉQUENCE.

364. *La progreſſion arithmétique croiſſante ou décroiſſante* $\div a.b.c.d.e.f.g$, *étant ainſi exprimée* $\div a.a \pm p.a \pm 2p.a \pm 3p.a \pm 4p.a \pm 5p.a \pm 6p$, *on voit que deux termes de cette progreſſion, ſéparés par quel nombre de termes on voudra, ſont en proportion arithmétique avec deux autres termes ſéparés l'un de l'autre par un pareil nombre de termes.*

Par exemple, en comparant enſemble le premier & le quatrieme, le troiſieme & le ſixieme, on a évidemment $a.a \pm 3p : a \pm 2p.a \pm 5p$.

Car la différence du premier de ces quatre termes au ſecond, eſt la même que la différence du troiſieme au quatrieme: cette différence eſt $3p$ dans l'exemple propoſé. En général elle eſt la différence propre de la progreſſion multipliée par un même nombre pour chacun des rapports.

365. *Par la même raiſon ſi l'on prend dans une pro-*

greſſion arithmétique trois termes, tels que le ſecond ſoit à égale diſtance du premier & du troiſieme, ces trois termes ſeront en proportion arithmétique continue. Par exemple, *ſi on compare le ſecond terme au quatrieme, le quatrieme au ſixieme, on a évidemment* $\div a \pm p . a \pm 3p . a \pm 5p$.

PROPOSITION II.

366. *Dans toute progreſſion arithmétique la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme de deux moyens quelconques pris à égale diſtance des extrêmes.*

Et ſi le nombre des termes de la progreſſion eſt impair, le terme du milieu ſera la moitié de la ſomme des extrêmes.

DÉMONSTRATION.

1°. Puiſque l'on prend deux moyens à égale diſtance des extrêmes, il y a autant de termes entre le premier extrême & le premier de ces moyens, qu'entre le ſecond moyen & le ſecond extrême : ainſi le premier extrême & le premier moyen ſont en proportion arithmétique avec le ſecond moyen & le ſecond extrême (n°. 364).

Donc la ſomme des deux extrêmes eſt égale à la ſomme de deux moyens pris à égale diſtance des extrêmes (n°. 359). Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

2°. Lorſque le nombre des termes de la progreſſion eſt impair, les deux extrêmes ſont encore en proportion continue avec le terme du milieu (n°. 365), & par conſéquent la ſomme des extrêmes eſt double de ce terme du milieu. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Cette propoſition eſt très-ſenſible dans la progreſſion $\div a . a \pm p . a \pm 2p . a \pm 3p . a \pm 4p . a \pm 5p . a \pm 6p$: en ajoutant enſemble deux moyens quelconques pris à égale diſtance des extrêmes, on trouvera toujours

$2a \pm 6p$, ce qui eſt la ſomme des extrêmes ; & le terme du milieu $a \pm 3p$, eſt évidemment la moitié de cette ſomme.

PROPOSITION III.

367. *La ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique quelconque eſt égale à la ſomme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes.*

DÉMONSTRATION.

1°. Si le nombre des termes de la progreſſion eſt pair, il eſt viſible qu'en ajoutant enſemble les extrêmes, & enſemble les moyens deux à deux, & pris à égale diſtance des extrêmes, le nombre de ces ſommes ne ſera que la moitié du nombre des termes.

Mais chacune de ces ſommes eſt égale à celle des extrêmes (366). Donc on aura la valeur de ces ſommes, c'eſt-à-dire, la ſomme de tous les termes de la progreſſion, en multipliant la ſomme des extrêmes par le nombre de ces ſommes, c'eſt-à-dire, par la moitié du nombre des termes.

2°. Si le nombre des termes de la progreſſion eſt impair, il eſt évident qu'en ôtant le terme du milieu, & en faiſant la ſomme des extrêmes, & celles des autres moyens pris deux à deux & à égale diſtance des extrêmes, le nombre de ces ſommes ſera la moitié du nombre des termes diminué de l'unité ; ainſi la ſomme de deux moyens quelconques pris à égale diſtance des extrêmes étant égale à la ſomme des extrêmes (n°. 366), la ſomme de tous les termes de cette progreſſion, en n'y comprenant pas le terme du milieu, ſera égale à la ſomme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes diminué de l'unité ; mais le terme du milieu eſt égal à la ſomme des extrêmes, multipliée par $\frac{1}{2}$ (n°. 366). Donc lorſque

le nombre des termes de la progreſſion eſt impair, la ſomme de tous les termes eſt égale à la ſomme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes diminué de l'unité plus par $\frac{1}{2}$, ce qui eſt évidemment le produit de la ſomme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes.

Car le nombre des termes étant exprimé par n, ce nombre diminué de l'unité, & réduit enſuite à ſa moitié, & augmenté enfin de $\frac{1}{2}$, eſt égal à $\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$; & par conſéquent puiſque la ſomme de tous les termes de la progreſſion, dont le nombre des termes eſt impair, eſt égale à la ſomme des extrêmes, multipliée par $\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}$, elle eſt dès lors égale à la ſomme des extrêmes, multipliée par $\frac{n}{2}$, c'eſt-à-dire, par la moitié du nombre des termes.

On déduira des propriétés des progreſſions arithmétiques la ſolution des problêmes ſuivans; & pour ne pas les multiplier inutilement, on avertit que l'on regardera toute progreſſion arithmétique comme étant croiſſante. En conſéquence le dernier terme d'une progreſſion décroiſſante ſera pris pour le premier, & le premier ſera pris pour le dernier.

ARTICLE II.

Problêmes.

PROBLÊME I.

368. *Le premier & le dernier terme, & le nombre des termes d'une progreſſion arithmétique étant donnés, connoître la ſomme des termes & la différence.*

SOLUTION.

1°. Puiſque la ſomme des termes de toute progreſſion.

ſion arithmétique eſt égale au produit de la ſomme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes (n°. 367), il eſt évident que le premier & le dernier terme, & le nombre des termes étant donnés, on a tout ce qu'il faut pour connoître la ſomme des extrêmes.

On ajoutera enſemble le premier & le dernier terme, on multipliera la ſomme qui réſultera par la moitié du nombre des termes, & le produit ſera la ſomme de tous les termes de la progreſſion.

2°. Pour connoître la différence de la progreſſion par le moyen des mêmes données, que le premier terme ſoit déſigné par . . . . . a,
le dernier terme par . . . . . m,
le nombre des termes par . . . . . n,
la différence cherchée par . . . . . x,
le nombre des termes qui précedent le dernier, ſera . . . . . $n-1$,
le produit de la différence par le nombre des termes qui précedent le dernier, ſera . . . $xn-x$.

Mais le dernier terme de toute progreſſion arithmétique conſidérée comme croiſſante, eſt égal au premier plus la différence multipliée par le nombre des termes qui précedent le dernier (n°. 363). Ainſi on aura . . . . . $a+xn-x=m$,

Donc l'on conclura en tranſpoſant a, $xn-x=m-a$ (219), & en diviſant chaque membre par le multiplicateur $n-1$ de l'inconnue (216) $x=\frac{m-a}{n-1}$.

Ce qui montre que lorſque l'on connoît le premier & le dernier terme d'une progreſſion arithmétique conſidérée comme croiſſante avec le nombre des termes, on détermine la différence en retranchant le premier terme du dernier, & en diviſant le reſte par le nombre des termes diminué de l'unité.

EXEMPLE.

On propoſe de déterminer la ſomme des termes & la différence d'une progreſſion arithmétique, dont le premier terme eſt 9,
le dernier terme 36,
le nombre des termes . . . . . 10.

1°. Puiſque la ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique eſt égale à la ſomme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes (n°. 367), pour déterminer cette ſomme dans l'exemple propoſé, on ajoutera le premier terme 9 avec le dernier 36, ce qui donnera 45 pour la ſomme des extrêmes; on multipliera enſuite 45 par la moitié 5 du nombre des termes 10, & le produit 225 ſera la ſomme cherchée de tous les termes de la progreſſion.

2°. Pour déterminer la différence, on mettra dans la formule $x = \frac{m-a}{n-1}$, à la place des lettres, leurs valeurs numériques, on aura l'équation $x = \frac{36-9}{10-1} = \frac{27}{9} = 3$, qui montre que la différence cherchée eſt 3.

PROBLÊME II.

369. *Le premier & le dernier terme d'une progreſſion arithmétique étant donnés avec la différence, connoître le nombre des termes & la ſomme de la progreſſion.*

SOLUTION.

Le problême ſe réduit évidemment à connoître le nombre des termes, parce qu'auſſitôt que ce nombre des termes ſera connu, comme l'on donne d'ailleurs le premier & le dernier terme, on connoîtra la ſomme des termes de la progreſſion par la premiere partie du problême précédent (n°. 368) : or voici comme l'on pourra déterminer le nombre des termes.

Que le premier terme ſoit déſigné par . . a,
le dernier par . . . . . m,
la différence par . . . . . p,
& le nombre des termes par . . . . . y,
le nombre des termes qui précedent le dernier,
ſera . . . . . $y-1$,
& le produit de la différence par le nombre
des termes qui précedent le dernier, ſera $py-p$.

Mais le dernier terme de toute progreſſion arithmétique conſidérée comme croiſſante, eſt égal au premier plus la différence multipliée par le nombre des termes qui précedent le dernier (n°. 363). Ainſi on aura . . . . . $a+py-p=m$.

D'où l'on conclura en tranſpoſant a & $-p$ (219),
. . . . . $py=m-a+p$.

Et en diviſant enſuite chaque membre de cette nouvelle équation par p (226), . . . $y=\frac{m-n+p}{p}$,
ou . . . . . $y=\frac{m-a}{p}+1$.

Ce qui montre que lorſqu'on connoît le premier & le dernier terme; & la différence d'une progreſſion arithmétique quelconque, conſidérée comme croiſſante, on connoîtra le nombre des termes, en retranchant le premier terme du dernier, & diviſant enſuite le reſte par la différence de la progreſſion, & en ajoutant l'unité au quotient.

PROBLÈME III.

370. *Le premier & le dernier terme étant donnés avec la ſomme de la progreſſion, connoître le nombre des termes & la différence.*

SOLUTION.

Ce problème ſe réduit à connoître le nombre des

termes : car auſſi-tôt que l'on connoîtra le nombre des termes, comme l'on a d'ailleurs le premier & le dernier terme, on aura la différence par la ſolution de la ſeconde partie du problême premier (n°. 368).

Or on déterminera le nombre des termes en procédant comme il ſuit.

Le premier terme étant toujours déſigné par a, & le dernier par . . . . . m; que la ſomme de tous les termes de la progreſſion ſoit déſignée par . . . . . s, le nombre inconnu de tous les termes par . . . y, la ſomme des extrêmes ſera . . . $a+m$. Cette ſomme des extrêmes multipliés par la moitié du nombre des termes, ſera . . . . $\frac{ay+my}{2}$.

Mais on ſait que le produit de la ſomme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes, eſt égale à la ſomme de tous les termes de la progreſſion (n°. 367). Ainſi on aura . . . . $\frac{ay+my}{2}=s$.

D'où l'on conclura en diviſant chaque membre de cette équation par $\frac{a+m}{2}$ (226) . . . $y=\frac{2s}{a+m}$.

Ce qui montre que lorſqu'on connoîtra le premier, le dernier terme & la ſomme de tous les termes d'une progreſſion, on aura le nombre des termes de la progreſſion, en faiſant la ſomme des extrêmes, & en diviſant par cette ſomme le double de la ſomme des termes de la progreſſion, ou, ce qui revient au même, en diviſant la ſomme des termes de la progreſſion par la moitié de la ſomme des extrêmes.

PROBLÊME IV.

371. *Le premier & le dernier terme d'une progreſſion arithmétique étant donnés avec le nombre des termes, ou*

avec la ſomme de la progreſſion, connoître chaque terme.

SOLUTION.

Le premier & le dernier terme étant donnés avec le nombre des termes, on aura la différence par le problême (n°. 368).

Le premier & le dernier terme étant donnés avec la ſomme des termes de la progreſſion, on aura la différence en cherchant d'abord le nombre des termes par le problême (n°. 370).

Or la différence & le premier terme étant connus, on aura quel terme on voudra, après le premier, dans la progreſſion croiſſante, en ajoutant au premier la différence multipliée par le nombre des termes qui précéderont le terme demandé, & l'on aura quel terme on voudra dans la progreſſion décroiſſante, en retranchant du premier terme la différence multipliée par le nombre des termes qui précéderont le terme demandé (n°. 363).

SECTION III.

Des Logarithmes.

ARTICLE I.

372. LES *logarithmes* ſont des termes en progreſſion arithmétique, qui répondent à ceux d'une progreſſion géométrique.

Dans la ſuite 1 ou a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, &c. compoſée de l'unité & des puiſſances ſucceſſives de la grandeur a.

Comme le quotient de chaque terme diviſé par celui qui le précede eſt a, & que l'expoſant de chaque

terme ſurpaſſe de l'unité l'expoſant du terme précédent, on a cette double progreſſion :

$$\div\div a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 : a^6 : a^7 : a^8 : a^9, \text{ \&c.}$$
$$\div\ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9, \text{ \&c.}$$

La premiere géométrique, & compoſée de l'unité ou de a^0, & des puiſſances ſucceſſives de la grandeur a.

La ſeconde arithmétique, & compoſée des expoſans des termes conſécutifs de la premiere.

Or ces deux progreſſions étant diſpoſées l'une ſous l'autre, comme on le voit, chaque terme de l'inférieure eſt dit le logarithme du terme qui lui répond dans la ſupérieure.

Par exemple, o étant le logarithme de a^0 ou de 1, 1 eſt le logarithme de a^1, 2 eſt le logarithme de a^2, & ainſi de ſuite.

ARTICLE II.

Propriétés des Logarithmes.

Les deux progreſſions étant ainſi diſpoſées.

$$\left\{\begin{array}{l} \div\div a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 : a^6 : a^7 : a^8 : a^9 \\ \div\ 0 : 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 \end{array}\right.$$

373. *On voit*, 1°. *que le logarithme du produit eſt toujours égal à la ſomme des logarithmes de ſes produiſans.*

Que l'on multiplie en effet a^3 par a^5, le produit ſera a^8 (n°. 167).

Or le logarithme de ce produit eſt évidemment la ſomme $3+5$ des logarithmes des produiſans a^3, a^5.

374. 2°. *Le logarithme du quotient de deux grandeurs diviſées l'une par l'autre, eſt égal à la différence des logarithmes de ces deux grandeurs.*

Que l'on diviſe, par exemple, a^6 *par* a^4, *le quotient ſera* a^2 (n°. 168) : *or le logarithme* 2 *de ce quotient eſt évidemment la différence* $6-4$ *des logarithmes du dividende* a^6, *& du diviſeur* a^4.

375. 3°. *Quatre termes, par exemple* a^1, a^3, a^6, a^8, *en proportion géométrique, ont leurs logarithmes* 1, 3, 6, 8 *en proportion arithmétique.*

376. 4°. *Trois termes, par exemple* a^2, a^4, a^6 *en proportion géométrique continue, ont leurs logarithmes* 2, 4, 6 *en proportion arithmétique continue.*

377. 5°. *Le logarithme du quarré d'une grandeur eſt le produit fait de la multiplication du logarithme de cette grandeur par le nombre* 2.

Par exemple, *le quarré de* a^3 *eſt* a^6 (n°. 172) : *or le logarithme* 6 *eſt évidemment le produit* 3×2 *du logarithme* 3 *de la grandeur* a^3, *multiplié par le nombre* 2.

378. 6°. *Le logarithme du cube d'une grandeur eſt le produit fait de la multiplication du logarithme de cette grandeur par le nombre* 3.

Par exemple, le cube de a^4 eſt a^{12} (n°. 172) : or le logarithme 12 de ce cube eſt évidemment le produit du logarithme 4 de la grandeur a^4, multiplié par le nombre 3.

379. *En général, le logarithme d'une puiſſance quelconque d'une grandeur eſt le produit fait de la multiplication du logarithme de cette grandeur, par le nombre qui marque le degré de cette puiſſance.*

380. D'où il ſuit que le logarithme d'une racine quelconque d'une grandeur, eſt le quotient du logarithme de cette grandeur, diviſé par le nombre qui marque le degré de cette racine.

C'eſt-à-dire, que le logarithme de la racine quarrée d'une grandeur, eſt la moitié du logarithme de cette grandeur ; le logarithme de la racine cubique d'une grandeur, eſt le tiers du logarithme de cette grandeur, & ainſi de ſuite.

C'eſt par le moyen de ces propriétés qu'ayant pris pour les logarithmes des nombres en progreſſion décuple 1, 10, 100, 1000, 10000, &c. les termes de

la ſérie naturelle 0, 1, 2, 3, 4, &c. on a conſtruit les tables des logarithmes ; c'eſt-à-dire, que l'on a déterminé les termes en progreſſion arithmétique qui répondent à des termes en progreſſion géométrique ſenſiblement égaux aux nombres naturels compris entre 1 & 10, entre 10 & 100, entre 100 & 1000, &c.

Comme ces tables des logarithmes ſont toujours accompagnées de l'explication de leur conſtruction, de leur diſpoſition & de la maniere de s'en ſervir, on ſe contentera de dire ici un mot touchant l'uſage des logarithmes dans l'arithmétique.

Cet uſage eſt fondé ſur les propriétés que l'on vient d'expoſer.

ARTICLE III.

De l'uſage des logarithmes dans l'arithmétique.

381. 1°. *Par le moyen des logarithmes on réduit la multiplication à une ſimple addition.*

Car puiſque le logarithme d'un produit eſt égal à la ſomme des logarithmes de ſes produiſans (n°. 373), il ſuit que pour avoir le produit de deux nombres propoſés, il faut prendre dans les tables le logarithme de chacun de ces nombres, les ajouter enſemble, & chercher enſuite dans les tables à quel nombre cette ſomme répond ; ce nombre ſera le produit demandé.

382. 2°. *Par le moyen des logarithmes on réduit la diviſion à une ſimple ſouſtraction.*

Car puiſque le logarithme du quotient eſt égal à la différence des logarithmes du dividende & du diviſeur (n°. 374), il ſuit que pour avoir le quotient de deux nombres diviſés l'un par l'autre, il faut prendre dans les tables le logarithme du dividende, & le logarithme du diviſeur, retrancher le ſecond du premier, & chercher enſuite dans les tables à quel nom-

bre cette différence répond. Ce nombre ſera le quotient demandé.

383. 3°. *La regle de trois qui ſe fait par la multiplication & la diviſion, ſe change par le moyen des logarithmes en une regle de trois qui ſe fait par l'addition & la ſouſtraction.*

Car puiſque quatre termes étant en proportion géométrique, leurs logarithmes ſont en proportion arithmétique (n°. 375), il ſuit que ſi un terme demandé eſt le quatrieme terme d'une proportion géométrique, dont les trois premiers termes ſont donnés, ſon logarithme ſera le quatrieme terme d'une proportion arithmétique, dont les trois premiers termes ſeront les logarithmes des termes donnés.

Or, dans la proportion arithmétique, le quatrieme terme eſt égal à la ſomme des moyens moins le premier extrême.

Donc étant donnés les trois premiers termes d'une proportion géométrique, on déterminera le quatrieme terme en opérant comme il ſuit.

On prendra dans les tables les logarithmes des trois nombres donnés; on ajoutera enſemble les logarithmes du ſecond & du troiſieme; on retranchera enſuite de cette ſomme le logarithme du premier terme, la différence ſera le logarithme du quatrieme terme demandé, & en cherchant dans les tables à quel nombre cette différence répond, on aura le quatrieme terme demandé.

384. 4°. *Pour avoir le quarré d'un nombre, il faudra prendre ſon logarithme dans les tables, doubler le logarithme, ce double ſera le logarithme du quarré* (n°. 377), *& le nombre qui répondra dans les tables à ce logarithme du quarré, ſera ce quarré cherché.*

Et pour avoir la racine quarrée d'un nombre, on prendra dans les tables le logarithme du nombre; on di-

viſera ce logarithme par 2, pour avoir le logarithme de la racine, à côté duquel on trouvera dans les tables la racine demandée.

On aura le cube d'un nombre en cherchant dans les tables le logarithme de ce nombre, & en triplant ce logarithme, le triple ſera le logarithme du cube (n°. 378), *& le nombre qui répondra dans les tables à ce logarithme triplé, ſera le cube cherché.*

Et pour avoir la racine cubique d'un nombre, on prendra dans les tables le logarithme de ce nombre; on diviſera ce logarithme par 3, pour avoir le logarithme de la racine cubique, à côté duquel on trouvera dans les tables la racine cherchée.

En général, pour avoir une puiſſance quelconque d'un nombre donné, on cherchera dans les tables le logarithme de ce nombre; l'on multipliera ce logarithme par le nombre qui exprime le degré de la puiſſance demandée; le produit ſera le logarithme de la puiſſance cherchée, & le nombre que l'on trouvera dans les tables à côté de ce logarithme, ſera la puiſſance demandée du nombre propoſé.

Et pour avoir la racine quelconque d'un nombre propoſé, on cherchera dans les tables le logarithme de ce nombre; on diviſera ce logarithme par le nombre qui exprime le degré de la racine demandée, & le quotient de cette diviſion ſera le logarithme de cette racine, & à côté de ce logarithme on trouvera dans les tables la racine demandée du nombre propoſé.

CHAPITRE ONZIEME.

Application de l'Algebre à la réſolution de quelques problêmes d'arithmétique.

SECTION PREMIERE.

De la réſolution de quelques problêmes ſur les progreſſions géométriques ; & ſur les progreſſions arithmétiques.

De la recherche des racines quarrées & cubiques, des quantités compoſées de radicales du ſecond degré, & de non radicales.

ARTICLE I.

Problêmes ſur les progreſſions géométriques.

PROBLÊME I.

385. *TROUVER trois nombres en progreſſion géométrique, connoiſſant l'expoſant de cette progreſſion avec le produit du premier de ces nombres par le quarré du troiſieme.*

SOLUTION.

Soit le produit donné . . . . . $= a$
l'expoſant donné . . . . . $= r$
le premier terme de la progreſſion . . $= x$
le ſecond terme ſera (n°. 348) . . . $= rx$
& par la même raiſon le troiſieme . . . $= r^2x$,
on aura, ſelon la condition du problême, cette équation . . . . . $r^4x^3 = a$,
d'où l'on tire (301) . . . . . $x = \sqrt[3]{\frac{a}{r^4}}$.

Si . . . . . $\begin{cases} a = 648 \\ r = 3, \end{cases}$

en ſubſtituant ces valeurs on aura $x = \sqrt[3]{\frac{648}{81}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Le premier terme de la progreſſion ſera donc 2,
le ſecond repréſenté par rx, ſera . . . $2 \times 3 = 6$,
le troiſieme repréſenté par r^2x, ſera $9 \times 2 = 18$,
& la progreſſion ſera . . . . . $\div\div 2 : 6 : 18$.

PROBLÊME II.

386. *Entre deux nombres donnés, trouver tant de moyens proportionnels géométriques que l'on voudra.*

SOLUTION.

Soit le premier des nombres donnés . . . $= a$
le dernier . . . . . $= b$
le premier des moyens . . . . . $= x$
le nombre des moyens . . . . . $= n$,
on aura (349) . . . $a^{n+1} : x^{n+1} :: a : b$,
d'où l'on tire (n°. 323) . . . $ax^{n+1} = a^{n+1}b$.
Et en réſolvant cette équation à deux termes $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$ (n°. 301).

Le premier terme x des moyens étant ainſi déterminé, on le diviſera par le premier terme donné a, pour avoir l'expoſant de la progreſſion ; cet expoſant de même que le premier terme étant connu, on déterminera aiſément chacun des autres moyens demandés (n°. 348).

Si . . . . . $\begin{cases} a = 1 \\ b = 243 \\ n = 4, \end{cases}$

on aura le premier des moyens $x = \sqrt[5]{243} = 3$.

L'expoſant de la progreſſion ſera 3, & la progreſſion ſera . . . . $\div\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243$.

PROBLÊME III.

387. *Connoiſſant dans une progreſſion géométrique le premier, le dernier terme avec le nombre des termes, connoître l'expoſant.*

SOLUTION.

Soit le premier terme . . . . . $= a$
le dernier . . . . . $= b$
le nombre des termes . . . . . $= n$
l'expoſant . . . . . $= x$,
on aura (n°. 348) . . . $ax^{n-1} = b$.
Réſolvant cette équation à deux termes (n°. 301), il viendra pour la valeur de l'expoſant . . . $x = \sqrt[n-1]{\frac{b}{a}}$.

Si . . . . . $\begin{cases} a = 2 \\ b = 486 \\ n = 6, \end{cases}$

on aura . . . $x = \sqrt[5]{\frac{486}{2}} = \sqrt[5]{243} = 3$,
& la progreſſion ſera (n°. 348) $\div$ 2:6:18:54:162:486.

PROBLÊME IV.

388. *Connoiſſant l'expoſant, le nombre des termes, & la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique, trouver le premier terme.*

SOLUTION.

Soit l'expoſant . . . . . $= r$
le nombre des termes . . . . $= n$
la ſomme de tous les termes . . $= a$
le premier terme . . . . . $= x$
le ſecond ſera (n°. 348) . . . $= rx$
& par la même raiſon le dernier . $= x \times r^{n-1}$;
& l'on aura pour la ſomme (n°. 351) . . .

$$\frac{r^{n-1} \times rx - x^2}{rx - x} = a.$$

On tire de la premiere équation $y = \frac{c-a}{c-b}$, & ſubſtituant dans la ſeconde équation les logarithmes, on aura . . . . $lb = la + xly - ly$, d'où l'on déduit (n°. 220) $xly = lb - la + ly$; & diviſant chaque membre par ly, il vient . . . . . $x = \frac{lb-la}{ly} + 1$;

& ſubſtituant à la place de y ſa valeur $\frac{c-a}{c-b}$, on aura . . . $x = \frac{lb-la}{lc-a - lc-b} + 1$.

Si . . . . . $\begin{cases} a = 2 \\ b = 486 \\ c = 728, \end{cases}$

on aura . . . $y = \frac{728-2}{728-486} = \frac{726}{242} = 3$;

& $x = \frac{2.6866363 - 0.3010300}{2.8609366 - 2.3838254} + 1 = \frac{2.3856063}{4771212} + 1$,

qui devient . . . . $x = 5 + 1 = 6$.

ARTICLE II.

Problêmes ſur les progreſſions arithmétiques.

PROBLÊME I.

391. *Connoiſſant le premier terme, la différence & la ſomme des termes d'une progreſſion arithmétique, trouver le nombre des termes, & le dernier terme.*

SOLUTION.

Soit le premier terme . . . . $= a$
la différence . . . . . $= d$
le nombre des termes . . . . . $= x$
le dernier terme . . . . . $= y$
la ſomme des termes . . . . $= c$,

on

on aura . . . $\begin{cases} y = a + d \times \overline{x - 1} & (n^{o}. 363) \\ c = \overline{a + y} \times \frac{x}{2} & (n^{o}. 366). \end{cases}$

Prenant la valeur de y dans la seconde de ces équations, on aura . . $\frac{2c}{x} - a = y$ (n°. 227, 220); mettant cette valeur de y à sa place dans la premiere équation, il viendra $a + d \times \overline{x - 1} = \frac{2c}{x} - a$,

en transposant $-a$ (n°. 220) $2a + dx - d = \frac{2c}{x}$,

en multipliant par x (n°. 222) $2ax + dx^2 - dx = 2c$,

ou . . . . . $dx^2 + \overline{2a - d} \times x = 2c$;

en divisant par d . . . $x^2 + \frac{2a - d}{d} \times x = 2c$,

faisant $\frac{2a - d}{d} = \pm 2p$, & ajoutant p^2 à chaque membre . . . $x^2 \pm 2px + p^2 = \frac{2c}{d} + p^2$,

extrayant la racine quarrée $\begin{Bmatrix} x \pm p \\ p - x \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2c}{d} + p^2}$;

& en transposant p (n°. 220) $x = \mp p + \sqrt{\frac{2c}{d} + p^2}$,

ou . . . . . $x = p - \sqrt{\frac{2c}{d} + p^2}$.

Lorsque $\frac{2a - d}{d}$ ou $2p$ est positif, le nombre des termes est . . . . $x = -p + \sqrt{\frac{2c}{d} + p^2}$,

& lorsque $2p$ est négatif . . $x = p + \sqrt{\frac{2c}{d} + p^2}$.

Car l'autre valeur $p - \sqrt{\frac{2c}{d} + p^2}$ est négative, puisque $\sqrt{\frac{2c}{d} + p^2} > p$, & comme le nombre des termes d'une progression est toujours positif, il faut que dans

le cas où $\frac{2a-d}{d}$, ou $2p$ est négatif, qu'on ait

$$x = p + \sqrt{\frac{2c}{d} + p^2}.$$

Si on met ensuite cette valeur de x dans $\frac{2c}{x} - a = y$,

on aura $$y = \frac{2}{\mp p + \sqrt{\frac{2c}{d} + p^2}} - 1.$$

Si $\begin{cases} a = 2 \\ d = 3 \\ c = 57, \end{cases}$

on aura $2p = \frac{2a-d}{d} = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}$;

& par conséquent $x = -\frac{1}{6} + \sqrt{\frac{114}{3} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{1369}{36}} - \frac{1}{6}$,

ou $x = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$,

& $y = \frac{114}{6} - 2 = \frac{114-12}{6} = \frac{102}{6} = 17$,

& la progression sera $\div 2 : 5 : 8 : 11 : 14 : 17$.

PROBLÈME II.

392. *Connoissant la différence, le nombre des termes & la somme de tous les termes d'une progression arithmétique, connoître le premier & le dernier terme.*

SOLUTION.

Soit la différence . . . . $= d$;
le nombre des termes . . . . $= n$
la somme de tous les termes . . . $= c$
le premier terme . . . . $= x$
le dernier . . . . . $= y$,

on aura . . . $\begin{cases} (\text{n}^{\text{o}}.\ 363)\ y = x + d \times \overline{n-1}. \\ (\text{n}^{\text{o}}.\ 366)\ c = \overline{x+y} \times \frac{n}{2}. \end{cases}$

Prenant la valeur de y dans la seconde équation,

on aura . . . . . $y = \frac{2c}{n} - x$,

Substituant cette valeur à la place de y dans la premiere équation, on aura $x + d \times \overline{n-1} = \frac{2c}{n} - x$,

ou . . . . . $x + dn - d = \frac{2c}{n} - x$,

d'où l'on tire . . . $x = \frac{c}{n} - \frac{dn}{2} + \frac{d}{2}$.

Substituant cette valeur de x à sa place dans $y = \frac{2c}{n} + x$,

on aura . . . $y = \frac{2c}{n} - \frac{c}{n} + \frac{dn}{2} - \frac{d}{2}$,

ou . . . . . $y = \frac{c}{n} + \frac{dn}{2} - \frac{d}{2}$.

Si . . . . . $\begin{cases} d = 3 \\ n = 6 \\ c = 57 \end{cases}$

on aura :

1°. $x = \frac{17}{6} - \frac{18}{2} + \frac{3}{2} = \frac{17}{6} - \frac{14}{6} + \frac{9}{6} = \frac{12}{6} = 2$.

2°. $y = \frac{17}{6} + \frac{18}{2} - \frac{3}{2} = \frac{17}{6} + \frac{14}{6} - \frac{5}{6} = \frac{102}{6} = 17$.

PROBLÊME III.

393. *Connoissant la différence, le dernier terme & la somme des termes d'une progression arithmétique, trouver le premier terme & le nombre des termes.*

SOLUTION.

Soit le premier terme . . . . . $= x$
le nombre des termes . . . . . $= y$
la différence . . . . . $= d$
le dernier terme . . . . . $= b$
la somme de tous les termes . . . $= c$,

on aura . . $\begin{cases} b = x + d \times y - 1 & (n^{o}. 363) \\ c = \overline{x+b} \times \frac{y}{2} & (n^{o}. 366). \end{cases}$

Dégageant y dans chacune de ces équations, on aura . . . . . $\begin{cases} \frac{b-x}{d} + 1 = y \\ \frac{2c}{x-b} = y. \end{cases}$

Comparant ces deux valeurs de y, $\frac{2c}{x+b} = \frac{b-x}{d} + 1$, multipliant chaque membre par $x + b$ & par d, il viendra . . . $2cd = b^2 - x^2 + bd + dx$, d'où l'on tire par la transposition $x^2 - dx = b^2 + bd - 2cd$. Résolvant cette équation du second degré, on aura (n°. 239, 240) $x = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{b^2 + bd - 2cd + \frac{1}{4}d^2}$.

Substituant cette valeur de x dans $y = \frac{2c}{x+b}$, on aura . . $y = \frac{2c}{\frac{1}{2}d \pm \sqrt{b^2 + bd - 2cd + \frac{1}{4}d^2} + b}$.

Si . . . . . $\begin{cases} d = 3 \\ b = 17 \\ c = 57, \end{cases}$

en prenant en + le radical $\sqrt{b^2 + bd - 2cd + \frac{1}{4}d^2}$,

on aura $\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \sqrt{289 + 51 - 342 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4} - 2} \\ \quad + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{4}{2} = 2 \\ y = \frac{114}{2+17} = \frac{114}{19} = 6. \end{cases}$

Et si on prend en — le même radical . . . $\sqrt{b^2 + bd - 2cd + \frac{1}{4}d^2}$,

il viendra $\begin{cases} x = \frac{3}{2} - \sqrt{289 + 51 - 341 + \frac{9}{4}} = \\ \quad \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{2}{2} = 1. \\ y = \frac{114}{1+17} = \frac{114}{18} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}. \end{cases}$

Comme le nombre des termes de la progreſſion doit être un nombre entier, il eſt viſible que la ſeconde valeur de y eſt impoſſible, & que par conſéquent il faut toujours prendre en $+$ le radical $\sqrt{b^2+bd-2cd+\frac{1}{4}d^2}$.

PROBLÊME IV.

394. *Connoiſſant le nombre des termes, le produit du premier terme par le dernier, & la ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique, trouver le premier & le dernier terme.*

SOLUTION.

Soit le nombre des termes . . . . $= n$
le produit du premier terme par le dernier $= a$
la ſomme de la progreſſion . . . . . $= c$
le premier terme . . . . . $= x$
le dernier . . . . . $= y$,

on aura $\begin{cases} xy = a \text{ par la condition du problême,} \\ c = \overline{x+y} \times \frac{n}{2} \text{ (n°. 366).} \end{cases}$

Dégageant y dans chacune de ces équations, il viendra . . . . . $\begin{cases} y = \frac{a}{x} \\ y = \frac{2c}{n} - x \end{cases}$

Comparant ces valeurs de y, on aura $\frac{a}{x} = \frac{2c}{n} - x$;

multipliant par x . . . . $a = \frac{2cx}{n} - x^2$.

Ce qui donne, en tranſpoſant, l'équation du ſecond degré $x^2 - \frac{2c}{n}x = -a$, dont la réſolution donne (n°. 240) . . . . $x = \frac{c}{n} \pm \sqrt{\frac{c^2}{n^2} - a}$.

Subſtituant cette valeur de x dans $y = \frac{a}{x}$, on

aura . . . $y = \frac{a}{\frac{c}{n} \pm \sqrt{\frac{c^2}{n^2} - a}}$,

Si . . . . . $\begin{cases} n = 6 \\ c = 57 \\ a = 34, \end{cases}$

on aura :

$x = \frac{57}{6} \pm \sqrt{\frac{3249}{36} - 34} = \frac{57}{6} \pm \sqrt{\frac{2025}{36}} = \frac{57}{6} \pm \frac{45}{6}$

$= \frac{102}{6}$ ou $= \frac{12}{6} = 17$ ou 2

$y = \frac{34}{17} = 2$ ou $= \frac{34}{2} = 17$.

Ce qui montre que, comme on n'a pas déterminé l'espece de progreſſion, c'eſt-à-dire, ſi elle eſt croiſſante ou décroiſſante, on pourra faire indifféremment le premier terme $x = 17$, & le dernier terme $y = 2$, ou le premier terme $x = 2$, & le dernier $y = 17$.

ARTICLE III.

De la recherche des racines quarrées & cubiques, des quantités compoſées de grandeurs radicales du ſecond degré, & de non radicales.

PROBLÊME I.

395. *Extraire la racine quarrée d'une quantité compoſée d'une grandeur commenſurable, & d'un radical du ſecond degré.*

SOLUTION.

Soit repréſentée la quantité propoſée par $p + \sqrt{q}$, p déſignant la partie commenſurable, & $\sqrt{q}$ le radical du ſecond degré.

Et ſoit déſignée la racine de cette quantité par $y + z$.

Les termes y, z de la racine ne pourront évidemment être au plus que des radicaux du ſecond degré,

puiſque l'élévation de cette racine au quarré, ne peut faire diſparoître d'autres eſpeces de radicaux; il eſt encore évident qu'au moins l'un des deux termes y, z, ſera un radical du ſecond degré, autrement le quarré de cette racine $y+z$, ne contiendroit aucun radical du ſecond degré.

Mais ſoit que y ſoit un radical du ſecond degré, ſoit que ce ſoit z, ou que ce ſoit tous les deux, ſi on fait le quarré de $y+z$ qui eſt $y^2+2yz+z^2$, il eſt viſible que ce quarré ne pourra avoir que le terme $2yz$ de radical: ainſi y^2+z^2 repréſentera la partie commenſurable p de la quantité propoſée $p+\sqrt{q}$, & $2yz$ repréſentera le radical $\sqrt{q}$ de la même quantité. Enſorte que l'on aura ces deux équations:

$$y^2+z^2=p$$
$$2yz=\sqrt{q}.$$

Prenant la valeur de z dans la ſeconde équation, il viendra . . . . . $z=\sqrt{\frac{q}{2y}}$.

Et ſubſtituant le quarré de cette valeur à la place de z^2 dans la premiere, on aura $y^2+\frac{q}{4y^2}=p$, ou en multipliant toute l'équation par y^2, & en tranſpoſant . . . . . $y^4-py^2=-\frac{q}{4}$.

Ce qui eſt une équation à trois termes renfermée dans la formule générale (n°. 303) $x^{2m}+px^m=q$, & de laquelle on tire $y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}p\pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}$,

Mettant le quarré de cette valeur de y dans l'équation $z^2=p-y^2$ que l'on tire de la premiere équation on aura . . . $z^2=p-\frac{1}{2}p\mp\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}$,

ou . . . . . $z^2=\frac{1}{2}p\mp\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}$,

d'où l'on tire . . . $z=\pm\sqrt{\frac{1}{2}p\mp\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}$.

& en réuniſſant la valeur de y & de z, on aura pour la racine quarrée de $p+q$, l'équation . . .

$$y+z=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}p\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}p\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-q}},$$

ou $y+z=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}$.

Car cette derniere expreſſion donne évidemment le même réſultat que celle-ci :

$$y+z=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}.$$

Avant d'employer cette formule pour extraire les racines quarrées des quantités repréſentées par $p+\sqrt{q}$, on fera la remarque ſuivante.

REMARQUE.

396. 1°. $y^2+2yz+z^2$ eſt autant le quarré de $-y-z$ que celui de $y+z$, par conſéquent la racine quarrée de $p+\sqrt{q}$ peut être également ou

$$-\sqrt{\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-q}},$$

ou $+\sqrt{\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}$, comme il eſt indiqué par le double ſigne $\pm$ de la formule $\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}$.

397. 2°. $y^2-2yz+z^2$ (n°. 121) étant le quarré de $y-z$, & celui de $-y+z$, lorſque dans la quantité propoſée le radical $\sqrt{q}$, repréſenté par $2yz$, aura le ſigne $-$, les deux parties de la racine auront des ſignes contraires; à ſavoir $+$ & $-$, ou $-$ & $+$.

398. 3°. De ce que $\begin{cases} 1°.\ y+z=\sqrt{p+\sqrt{q}}. \\ 2°.\ y-z=\sqrt{p-\sqrt{q}}. \end{cases}$

Et qu'en multipliant enſemble ces deux équations, il vient l'équation $y^2-z^2=\sqrt{p^2-q}$, dans laquelle le premier membre étant une quantité commenſurable, puiſque le radical du ſecond degré qui ſeul peut

affecter chacun des termes y, z, comme on l'a remarqué, diſparoît par l'élévation au quarré; le ſecond membre $\sqrt{p^2-q}$ eſt auſſi néceſſairement une quantité commenſurable.

Il ſuit que toutes les fois que la quantité $p+\sqrt{q}$ ſera dans le cas d'avoir une racine, c'eſt-à-dire, que toutes les fois qu'elle ſera un quarré parfait, p^2-q ſera auſſi un quarré parfait, & $\sqrt{p^2-q}$ ſera une quantité commenſurable. Cela poſé.

APPLICATION.

De la formule $y+z=\pm\sqrt{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}$, *touchant la valeur de la racine quarrée de* $p+\sqrt{q}$.

EXEMPLE I.

Soit la quantité $5+2\sqrt{6}$, dont il faut extraire la racine quarrée, en la comparant avec $p+\sqrt{q}$, on a $\begin{cases} 5=p \\ 2\sqrt{6}=\sqrt{q}, \end{cases}$ par conſéquent en élevant au quarré $\begin{cases} 25=p^2 \\ 24=q, \end{cases}$ d'où l'on tire $\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}=\frac{1}{2}\sqrt{25-24}=\frac{1}{2}\sqrt{1}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$.

Subſtituant ces valeurs de p & de $\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}$ dans $\pm\sqrt{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}$, on aura $+\sqrt{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{6}{2}}+\sqrt{\frac{4}{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $-\sqrt{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}=-\sqrt{\frac{6}{2}}-\sqrt{\frac{4}{2}}=-\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Enſorte que la racine quarrée de $4+2\sqrt{6}$, eſt ou $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, ou $-\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

EXEMPLE II.

Pour déterminer la racine quarrée de $\frac{9}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}}$, on comparera cette quantité avec $p + \sqrt{q}$, & l'on aura

$$\begin{cases} \frac{9}{2} = p \\ 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}, \end{cases}$$

élevant au quarré

$$\begin{cases} \frac{81}{4} = p^2 \\ 8 = q. \end{cases}$$

Et par conséquent

$$\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - q} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{81}{4} - 8} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{81}{4} - \frac{32}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{4}.$$

Substituant les valeurs de p & de $\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - q}$ dans $\pm\sqrt{\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - q}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - q}}$, on aura

$$+\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}} + \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{7}{4}} = +\sqrt{\frac{16}{4}} + \sqrt{\frac{2}{4}} = +2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}} - \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{7}{4}} = -\sqrt{\frac{16}{4}} - \sqrt{\frac{2}{4}} = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Enſorte que la racine quarrée de $\frac{9}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}}$, ſera $2 + \frac{1}{2}r^2$, ou $-2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

EXEMPLE III.

Pour déterminer la racine quarrée de $16 - 6\sqrt{7}$, on comparera cette quantité avec $p + \sqrt{q}$, & l'on aura

$$\begin{cases} 16 = p \\ 6\sqrt{7} = \sqrt{q}, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\begin{cases} 256 = p^2 \\ 252 = q. \end{cases}$$

Par conſéquent $\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - q} = \frac{1}{2}\sqrt{256 - 252} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = \frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{2} = 1$.

Subſtituant les valeurs de p & de $\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}$ dans $\pm\sqrt{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{p^2-q}}$, on aura $\begin{cases}+\sqrt{8+1}-\sqrt{8-1}=\sqrt{9}-\sqrt{7}=3-\sqrt{7}\\ \text{ou}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=3+\sqrt{7}.\end{cases}$

PROBLÊME II.

399. *Extraire la racine cubique d'une quantité compoſée, d'une grandeur commenſurable, & d'un radical du ſecond degré.*

SOLUTION.

Soit repréſentée la quantité propoſée par $p+\sqrt{q}$, p déſignant la partie commenſurable, & $\sqrt{q}$ le radical du ſecond degré.

Il eſt évident, 1°, que les deux termes de la racine cubique de cette quantité, ne pourront être chacun un radical du ſecond degré; car ſi chaque partie de cette racine étoit affectée du ſigne $\sqrt{\ }$, comme l'élévation au cube n'enleve pas le ſigne $\sqrt{\ }$, chaque terme du cube ſeroit affecté de ce ſigne; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

2°. L'une des deux parties de la racine de $p+\sqrt{q}$ ſera néceſſairement un radical du ſecond degré; autrement le cube, à ſavoir, $p+\sqrt{q}$, ne renfermeroit pas de radical du ſecond degré, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

3°. Cette même racine ne pourra renfermer d'autres eſpeces de radicaux que du ſecond degré, à moins que ce ne ſoit un radical du troiſieme degré, qui ſoit un commun produiſant à ſes deux parties, telle que ſeroit la racine $\sqrt{3+\sqrt{5}}\times\sqrt[3]{5}$, dont l'élévation au cube fait diſparoître le radical $\sqrt[3]{5}$. Cela poſé, ſup-

poſant la racine cubique de $p + \sqrt{q}$, repréſentée par $y + \sqrt{z}$, & faiſant le cube de $y + \sqrt{z}$, on aura $y^3 + 3y^2\sqrt{z} + 3yz + z\sqrt{z} = p + \sqrt{q}$. Et comme les termes commenſurables $y^3 + 3yz$ repréſenteront la partie commenſurable p de la quantité propoſée, & les radicaux $3y^2\sqrt{z} + z\sqrt{z}$, repréſenteront la partie radicale $\sqrt{q}$ de la même quantité,

on conclura . . . $\begin{cases} y^3 + 3yz = p \\ 3y^2\sqrt{z} + z\sqrt{z} = \sqrt{q}. \end{cases}$

Quarrant chaque membre dans ces deux équations, il viendra . . . $\begin{cases} y^6 + 6y^4z + 9y^2z^2 = p^2, \\ 9y^4z + 6y^2z^2 + z^3 = q. \end{cases}$

Retranchant la ſeconde de ces nouvelles équations de la premiere, on aura l'équation $y^6 - 3y^4z + 3y^2z^2 + z^3 = p^2 - q$, qui devient, en extrayant la racine cubique de chaque membre, $y^2 - z = \sqrt[3]{p^2 - q}$, d'où l'on tire . . . . $z = y^2 - \sqrt[3]{p^2 - q}$.

Prenant dans cette équation la valeur de z, & la ſubſtituant dans $y^3 + 3yz = p$, on aura l'équation

$$y^3 + 3y \times y^2 - \sqrt[3]{p^2 - q} = p,$$

ou

$$4y^3 * - 3y\sqrt[3]{p^2 - q} - p = 0,$$

qu'il faudra réſoudre pour avoir la partie y de la racine cherchée (n°. 294, 306).

Prenant la racine quarrée de chaque membre dans $z = y^2 - \sqrt[3]{p^2 - q}$, on aura l'équation ſuivante $\sqrt{z} = \sqrt{y^2 - \sqrt[3]{p^2 - q}}$, dans laquelle, ſi on ſubſtitue la valeur de y, lorſqu'on l'aura trouvée par le moyen de l'équation précédente, on aura évidem-

ment la valeur de la ſeconde partie $\sqrt{z}$ de la racine cherchée.

Avant d'appliquer ces formules à l'extraction des racines cubiques des quantités exprimées généralement par $p + \sqrt{q}$, on fera la remarque qui ſuit.

REMARQUE.

400. 1°. La ſeconde partie $\sqrt{z}$ de la racine cherchée doit avoir le même ſigne + ou — que le radical $\sqrt{q}$ de la quantité propoſée, étant évident que la partie radicale du cube de $y + \sqrt{z}$, laquelle eſt $3y^2\sqrt{z} + z\sqrt{z} = \overline{3y^2 + z} \times \sqrt{z} = \sqrt{q}$, ſera toujours de même ſigne que $\sqrt{z}$ (n°. 75).

401. 2°. Si la quantité exprimée généralement par $p + \sqrt{q}$ eſt un cube parfait, & que ſa racine cubique, repréſentée par $y + \sqrt{z}$ ne doive pas être affectée de radical du troiſieme degré, comme $y^2 - z$ ſera alors une quantité commenſurable, on déduit de l'équation $y^2 - z = \sqrt[3]{p^2 - q}$ que la quantité $p^2 - q$ ſera un cube parfait, & $\sqrt{p^2 - q}$ ſera une grandeur commenſurable; & comme p eſt ſuppoſé d'ailleurs une grandeur commenſurable, l'équation $4y^3 - 3y\sqrt[3]{p^2 - q} - p = 0$ ne contiendra point de radicaux, & l'on pourra par conſéquent trouver la valeur de y, en cherchant les racines commenſurables de cette équation (n°. 294).

Que ſi la quantité $p + \sqrt{q}$ étant toujours un cube parfait, ſa racine cubique repréſentée par $y + \sqrt{z}$ doit être affectée d'un radical cube, $y^2 - z$ n'étant pas alors une grandeur commenſurable, puiſque l'élévation au quarré ne peut faire diſparoître le ſigne $\sqrt[3]{}$, l'équation $4y^3 * - 3y\sqrt[3]{p^2 - q} - p = 0$, & l'on

ne pourra en déterminer les racines, c'eſt-à-dire, la valeur de la premiere partie y de la racine cherchée, qu'en délivrant cette équation de radicaux, comme on le verra dans l'Exemple III. qui ſuit.

APPLICATION.

Des formules . . $\begin{cases} 4y^3 * - 3y\sqrt[3]{p^2-q} - p = 0 \\ \sqrt{z} = \sqrt{y^2 - \sqrt[3]{p^2-q}}, \end{cases}$

touchant la valeur de la racine cubique de $p + \sqrt{q}$.

EXEMPLE I.

Soit la quantité $26 + 15\sqrt{3}$, de laquelle il faut extraire la racine cubique, en comparant cette quantité avec $p + \sqrt{q}$, on a . . . . $\begin{cases} 26 = p \\ 15\sqrt{3} = \sqrt{q}, \end{cases}$

par conſéquent . . . . . .

$p^2 = 676$
$q = 675$ & $\sqrt[3]{p^2-q} = \sqrt[3]{676-675} = \sqrt[3]{1} = 1.$

Subſtituant ces valeurs de p & de $\sqrt[3]{p^2-q}$ dans $4y^3 * - 3y\sqrt[3]{p^2-q} - p = 0$, on aura . . . . . $4y^3 * - 3y - 26 = 0$, qui ſe réduit à (n°. 291) $y^3 * - \frac{3}{4}y - \frac{26}{4} = 0$.

Faiſant dans cette équation $y = \frac{x}{2}$, & chaſſant les fractions on a (n°. 288) $x^3 * - 4x - 52 = 0$.

En réſolvant cette équation on trouve $x = 4$ (n°. 294).

Donc puiſque $y = \frac{x}{2}$, on a $y = \frac{4}{2} = 2$; la premiere partie de la racine cherchée eſt donc 2.

Préſentement ſubſtituant cette valeur d'y, & celle de $\sqrt[3]{p^2-q}$, dans $\sqrt{z} = \sqrt{y^2 - \sqrt[3]{p^2-q}}$, on aura $\sqrt{z} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Ainſi réuniſſant les valeurs de y & de $\sqrt{z}$, on aura $y + \sqrt{z} = 2 + \sqrt{3}$.

C'eſt-à-dire, que la racine cubique de $26 + 15\sqrt{3}$ eſt $2 + \sqrt{3}$.

EXEMPLE II.

Pour déterminer la racine cubique de $18 + 5\sqrt{13}$, ou de $5\sqrt{13} - 18$, on comparera cette quantité avec $p + \sqrt{q}$; ce qui donnera . . $\begin{cases} \pm 18 = \pm p \\ 5\sqrt{13} = \sqrt{q}, \end{cases}$

par conſéquent . . . . . $\begin{cases} 324 = p^2 \\ 325 = q; \end{cases}$

& $\sqrt[3]{p^2 - q} = \sqrt[3]{324 - 325} = \sqrt[3]{-1} = -1$.

En ſubſtituant ces valeurs de p & de $\sqrt[3]{p^2 - q}$ dans $4y^3 * - 3y\sqrt[3]{p^2 - q} - p = 0$, on aura

. . . . . $4y^3 * + 3y \pm 18 = 0$,

ou . . . . $y^3 * + \frac{3}{4}y \pm \frac{18}{4} = 0$.

1. 2. 4. 8.

Faiſant dans cette équation $y = \frac{x}{2}$, on aura (n°. 288) . . . . . $x^3 * + 3x \pm 36 = 0$.

En réſolvant cette équation (n°. 294), on trouve $x = \pm 3$.

Donc puiſque $y = \frac{x}{2}$, on aura . . $y = \pm \frac{3}{2}$.

La premiere partie de la racine cubique de $18 + 5\sqrt{13}$ eſt donc $+\frac{3}{2}$, & la premiere partie de la racine cubique de $5\sqrt{13} - 18$ eſt $-\frac{3}{2}$.

Subſtituant cette valeur de y, & celle de $\sqrt[3]{p^2 - q}$ dans . . . . . $\sqrt{z} = \sqrt{y^2 - \sqrt[3]{p^2 - q}}$,

on aura . . $\sqrt{z} = \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Ainſi réuniſſant les valeurs de y & de $\sqrt{z}$, on aura

pour la racine cubique de la quantité proposée $18 + 5\sqrt{13}$ . . $y + \sqrt{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Et pour la racine cubique de la quantité $5\sqrt{13} - 18$,

. . . . . $\sqrt{2} - y = \frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2}$.

EXEMPLE III.

Pour déterminer la racine cubique de $14 + 10\sqrt{2}$, on comparera cette quantité avec $p + \sqrt{q}$; ce qui donnera . . . . . $\begin{cases} 14 = p \\ 10\sqrt{2} = \sqrt{q}, \end{cases}$

par conſéquent . . . . . $\begin{cases} 196 = p^2 \\ 200 = q, \end{cases}$

& $\sqrt[3]{p^2 - q} = \sqrt[3]{196 - 200} = \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$.

En ſubſtituant les valeurs de p & de $\sqrt[3]{p^2 - q}$

dans . . . $4y^3 * - 3y\sqrt[3]{p^2 - q} - p = 0$,

on aura . . . $4y^3 * + 3y\sqrt[3]{4} - 14 = 0$,

ou . . . $y^3 * + \frac{3}{4}y\sqrt[3]{4} - \frac{14}{4} = 0$.

1. 2. 4. 8.

Faiſant dans cette équation (n°. 288) $y = \frac{x}{2}$,

. . . . $x^3 * + 3x\sqrt{4} - 28 = 0$.

Faiſant dans cette nouvelle équation $x = \frac{u}{\sqrt[3]{4}}$,

(n°. 288) pour enlever le radical $\sqrt[3]{4}$,

$$u^3 * + 3u\sqrt[3]{4} - 28 = 0$$
$$1.\ \sqrt[3]{4}.\ \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4} \cdot 4,$$

on aura l'équation . . $u^3 * + 12u - 112 = 0$

Réſolvant (n°. 249) cette derniere équation, on trouvera

trouvera 4 pour l'une des racines de u, c'eſt-à-dire que $u = 4$.

Donc puiſque $x = \frac{u}{\sqrt[3]{4}}$, on aura $x = \frac{4}{\sqrt[3]{4}}$ $= \frac{\sqrt[3]{4\times4\times4}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{4\times4} = \sqrt[3]{16}$.

Et parce que $y = \frac{x}{2}$, on aura $y = \frac{\sqrt[3]{16}}{2} = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{8}}$ $= \sqrt[3]{2}$.

La premiere partie de la racine cherchée eſt donc $\sqrt[3]{2}$?

Subſtituant préſentement cette valeur de y, & celle de $\sqrt[3]{p^2-q}$, dans la formule touchant la valeur de z; à ſavoir, $\sqrt{z} = \sqrt{y^2 - \sqrt[3]{p^2-q}}$, on aura : $\sqrt{z} = \sqrt{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{-4}} = \sqrt{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4}}$ $= \sqrt{2\sqrt[3]{4}} = \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2}$.

La ſeconde partie $\sqrt{z}$ de la racine cherchée eſt donc $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2}$?

Réuniſſant les valeurs de y & de $\sqrt{z}$, on aura pour la racine cherchée de la quantité propoſée $14+10\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} = 1 + \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2}$.

SECTION II.

De la maniere de ſommer les puiſſances d'un même degré quelconque des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque croiſſante & finie, d'où l'on déduit les formules pour ſommer les puiſſances des termes de la progreſſion des nombres naturels, & d'autres progreſſions dont les différences ſeront données.

Des nombres poligones & pyramidaux. Maniere de conter les pyramides de boulets.

Des regles pour ſommer les puiſſances d'un même degré quelconque des termes de la progreſſion des nombres naturels, pouſſée à l'infini.

ARTICLE I.

De la maniere de ſommer les puiſſances d'un même degré quelconque des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque finie & croiſſante, d'où l'on déduit les formules pour ſommer les puiſſances des termes de la progreſſion des nombres naturels, & d'autres progreſſions dont les différences ſont données.

PROBLÊME I.

402. *DÉTERMINER la ſomme des puiſſances d'un même degré quelconque des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque croiſſante & finie.*

SOLUTION.

Soit la progreſſion arithmétique quelconque croiſſante & finie . . . . . $\div a . b . c . u$.

Que la différence ſoit exprimée par d, & que ce

ſoit le dernier terme, $u+d$ ſera celui qui viendra immédiatement après le dernier, on aura évidemment

$$\begin{cases} a+d=b \\ b+d=c \\ c+d=u \\ u+d=u+d. \end{cases}$$

Ayant élevé chacune de ces équations ſimples,

1°. au quarré
$$\begin{cases} a^2+2ad+d^2=b^2 \\ b^2+2bd+d^2=c^2 \\ c^2+2cd+d^2=u^2 \\ u^2+2ud+d^2=\overline{u+d}^2. \end{cases}$$

2°. au cube
$$\begin{cases} a^3+3a^2d+3ad^2+d^3=b^3 \\ b^3+3b^2d+3bd^2+d^3=c^3 \\ c^3+3c^2d+3cd^2+d^3=u^3 \\ u^3+3u^2d+3ud^2+d^3=\overline{u+d}^3. \end{cases}$$

3°. à la 4e puiſſance
$$\begin{cases} a^4+4a^3d+6a^2d^2+4ad^3+d^4=b^4 \\ b^4+4b^3d+6b^2d^2+4bd^3+d^4=c^4 \\ c^4+4c^3d+6c^2d^2+4cd^3+d^4=u^4 \\ u^4+4u^3d+6u^2d^2+4ud^3+d^4=\overline{u+d}^4. \end{cases}$$

4°. à la 5e puiſſance
$$\begin{cases} a^5+5a^4d+10a^3d^2+10a^2d^3+5ad^4+d^5=b^5 \\ b^5+5b^4d+10b^3d^2+10b^2d^3+5bd^4+d^5=c^5 \\ c^5+5c^4d+10c^3d^2+10c^2d^3+5cd^4+d^5=u^5 \\ u^5+5u^4d+10u^3d^2+10u^2d^3+5ud^4+d^5 \\ \quad =\overline{u+d}^5. \end{cases}$$

5°. A la ſixieme puiſſance; 6°. à la ſeptieme, &c. &c.

Si on ajoute enſemble les équations du ſecond degré, puis enſemble celles du troiſieme, & de même celles du quatrieme, du cinquieme, &c. les premiers membres avec les premiers membres, les ſeconds aux ſeconds, & qu'on laiſſe dans les premiers membres des équations réſultantes les ſommes toutes dégagées

des termes a, b, c, u de la progreſſion donnée, élevés à une puiſſance d'un degré moindre d'une unité que celui des équations que l'on aura ajoutées ; à ſavoir, la ſomme des premieres puiſſances des termes a, b, c, u dans le premier membre de l'équation qui ſera la ſomme des équations du ſecond degré.

La ſomme des quarrés des termes a, b, c, u dans le premier membre de l'équation qui ſera la ſomme des équations du troiſieme degré.

La ſomme des cubes des termes a, b, c, u dans le premier membre de l'équation qui ſera la ſomme des équations du quatrieme degré.

La ſomme des quatriemes puiſſances des termes a, b, c, u dans le premier membre de l'équation, qui ſera la ſomme des équations du cinquieme degré, & ainſi de ſuite, on aura :

1°. $a+b+c+u=\frac{u+d}{2d}-\frac{a^2}{2d}-\frac{4d^2}{2d}$.

Ce que l'on tire de la ſomme des équations du ſecond degré.

2°. $a^2+b^2+c^2+u^2=\frac{\overline{u+d}^3}{3d}-\frac{a^3}{3d}-\frac{4d^3}{3d}-\frac{\overline{a+b+c+u}\times 3d^2}{3d}$.

Ce que l'on tire de la ſomme des équations du troiſieme degré.

3°. $a^3+b^3+c^3+u^3=\frac{\overline{u+d}^4}{4d}-\frac{a^4}{4d}-\frac{4d^4}{4d}-\frac{\overline{a^2+b^2+c^2+u^2}\times 6d^2}{4d}-\frac{\overline{a+b+c+u}\times 4d^3}{4d}$.

Ce que l'on tire de la ſomme des équations du quatrieme degré.

$$4^{\circ}.\ a^4+b^4+c^4+u^4=\frac{\overline{u+d}^5}{5d}-\frac{a^5}{5d}-\frac{d^5}{5d}$$
$$-\frac{\overline{a^3+b^3+c^3+u^3}\times 10d^2}{5d}-\frac{\overline{a^2+b^2+c^2+u^2}\times 10d^3}{5d}$$
$$-\frac{\overline{a+b+c+u}\times d^4}{5d}.$$

Ce que l'on tire de la ſomme des équations du cinquieme degré.

5°. &c. &c.

Si l'on fait attention aux produits qui compoſent les ſeconds membres des équations que l'on vient de trouver, pour ſommer les premieres, les ſecondes, les troiſiemes, les quatriemes, &c. puiſſances des termes de la progreſſion propoſée $\div a.b.c.u$, on conclura aiſément cette regle générale.

Regle générale.

403. Pour déterminer la ſomme des puiſſances d'un même degré quelconque des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque croiſſante & finie.

Il faudra élever le terme qui viendroit immédiatement après le dernier, à une puiſſance dont l'expoſant ſoit plus grand d'une unité que celui de la puiſſance des autres termes; puis retrancher de cette puiſſance :

1°. Une puiſſance du premier terme de la progreſſion dont l'expoſant ait une unité de plus que celui des puiſſances qu'il faut ſommer.

2°. Le produit fait de la multiplication du nombre des termes par la différence de la progreſſion élevée à une puiſſance dont l'expoſant ſoit encore plus grand d'une unité que celui des puiſſances qu'il faut ſommer.

3°. Le produit de la ſomme des termes de la pro-

greſſion dont le degré eſt moindre d'une unité que celui des puiſſances qu'il faut ſommer, multipliée par le quarré de la différence, pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le coefficient du troiſieme terme d'un binome élevé à la puiſſance à laquelle on a élevé celui qui viendroit immédiatement après le dernier terme de la progreſſion.

4°. Le produit de la ſomme des puiſſances des termes de la progreſſion, dont le degré eſt moindre de deux unités que celui des puiſſances qu'il faut ſommer, multipliée par le cube de la différence pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le coefficient du quatrieme terme d'un binome élevé à la puiſſance dont on a parlé ci-deſſus.

5°. Le produit de la ſomme des puiſſances des termes de la progreſſion dont le degré eſt moindre de trois unités que celui des puiſſances qu'il faut ſommer, multipliée par la différence élevée à la quatrieme puiſſance, & priſe autant de fois qu'il y a d'unités dans le coefficient du cinquieme terme d'un binome élevé à la puiſſance dont on a parlé ci-deſſus.

Et ainſi de ſuite incluſivement juſqu'à ce que l'on parvienne aux premieres puiſſances des termes de la progreſſion.

Enfin on diviſera le réſultat de toutes ces ſouſtractions par la différence multipliée par l'expoſant de la puiſſance à laquelle on aura élevé le terme qui viendroit immédiatement après le dernier de la progreſſion; le quotient de cette diviſion ſera la ſomme des puiſſances d'un même degré quelconque des termes de la progreſſion.

On exprimera cette regle générale par la formule qui ſuit:

Formule générale.

440. Touchant la valeur de la ſomme des puiſſan-

tes d'un même degré quelconque des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque croiſſante.

Le premier terme de la progreſſion étant toujours exprimé par . . . . . a
la différence par . . . . . d
le dernier terme par . . . . . u,
celui qui viendroit immédiatement après le dernier, par . . . . . $u+d$,
ſi on déſigne le nombre des termes par . . n
l'expoſant des puiſſances des termes deſquelles on cherche la ſomme, par . . . . . m
un terme quelconque par . . . . . t
le même terme élevé à la puiſſance m par . . t^m
la ſomme des puiſſances m des termes, par . . $\int.t^m$,
& que l'on exprime algébriquement les opérations que l'on vient de détailler dans la regle générale précédente, on aura pour la valeur générale de la ſomme des puiſſances d'un même degré quelconque m des termes d'une progreſſion quelconque arithmétique croiſſante, cette formule :

$$\int.t^m = \frac{\overline{u+d}^{m+1}}{\overline{m+1}\times d} - \frac{a^{m+1}}{\overline{m+1}\times d} - \frac{nd^{m+1}}{\overline{m+1}\times d}$$

$$- \frac{\int.t^{m-1}\times \frac{\overline{m+1}\times m}{1\times 2}d^2}{\overline{m}\times 1\times d}$$

$$- \frac{\int.t^{m-2}\times \frac{\overline{m+1}\times m\times \overline{m-1}}{1\times 2\times 3}d^3}{\overline{m+1}\times d}$$

$$- \frac{\int.t^{m-3}\times \frac{\overline{m+1}\times m\times \overline{m-1}\times \overline{m-2}}{1\times 2\times 3\times 4}d^4}{\overline{m+1}\times d}$$

— &c. — &c. — &c.

Comme cette formule convient à toutes les progreſſions arithmétiques, quels que ſoit la différence, & le premier terme, il eſt évident qu'on pourra aiſément en déduire des formules propres à chaque progreſſion, dont le premier terme & la différence ſeront donnés.

Formules particulieres déduites de la formule générale.

405. 1°. Si la progreſſion commence par 1, & a 1 pour différence, ce qui eſt la progreſſion des nombres naturels, dans laquelle le dernier terme eſt égal au nombre des termes, on ſubſtituera dans la formule générale 1 à la place de la différence d, & à la place du premier terme a, & n à la place du dernier terme u, & l'on aura pour cette progreſſion la formule

$$\int t^m = \frac{n+1}{m+1}^{m+1} - \frac{1}{m+1} - \frac{n}{m+1}$$

$$- \frac{\int t^{m-1} \times \frac{m+1 \times m}{1 \times 2}}{m+1} - \frac{\int t^{m-2} \times \frac{m+1 \times m \times m-1}{1 \times 2 \times 3}}{m+1}$$

$$- \frac{\int t^{m-3} \times \frac{m+1 \times m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3 \times 4}}{m+1}$$

— &c. — &c. — &c.

406. 2°. Si la progreſſion commence par 1, & a 2 pour différence, on ſubſtituera dans la formule générale 1 à la place du premier terme a, & 2 à la place de la différence d, & l'on aura pour cette progreſſion la formule,

$$\int t^m = \frac{u+2}{m+1 \times 2}^{m+1} - \frac{1}{m+1 \times 2} - \frac{n \times 2^{m+1}}{m+1 \times 2}$$

$$-\frac{f.t^{m-1}\times\frac{m+1\times m\times 4}{1\times 2}}{m+1\times 2}-\frac{f.t^{m-2}\times\frac{m+1\times m\times m-1}{1\times 2\times 3}\times 8}{m+1\times 2}$$

$$-\frac{f.t^{m-3}\times\frac{m+1\times m\times m-1\times m-2}{1\times 2\times 3\times 4}\times 16}{m+1\times 2}$$

— &c. . . . .

407. 3°. Si la progreſſion commence par 1, & a 3 pour différence, on ſubſtituera dans la formule générale 1 à la place du premier terme a, & 3 à la place de la différence d, & l'on aura pour cette ſuppoſition la formule,

$$f.t^m=\frac{u+3^{m+1}}{m+1\times 3}-\frac{1}{m+1\times 3}-\frac{n\times 3^{m+4}}{m+1\times 3}$$

$$-\frac{f.t^{m-1}\times\frac{m+1\times m}{1\times 2}\times 9}{m+1\times 3}$$

$$-\frac{f.t^{m-2}\times\frac{m+1\times m\times m-1}{1\times 2\times 3}\times 27}{m+1\times 3}$$

$$-\frac{f.t^{m-3}\times\frac{m+1\times m\times m-1\times m-2}{1\times 2\times 3\times 4}\times 81}{m+1\times 3}$$

— &c.

408. 4°. Si la progreſſion commence par 1, & a 4 pour différence, on ſubſtituera dans la formule générale 1 à la place du premier terme a, & 4 à la place de la différence d, & l'on aura pour cette ſuppoſition la formule

$$\int.t^m = \frac{u+4}{m+1\times 4}^{m+1} - \frac{1}{m+1\times 4} - \frac{n\times 4^{m-1}}{m+1\times 4}$$

$$- \frac{\int.t^{m-1} \times \frac{m+1\times m}{1\times 2} \times 16}{m+1\times 4}$$

$$- \frac{\int.t^{m-2} \times \frac{m+1\times m\times m-1}{1\times 2\times 3} \times 64}{m+1\times 4}$$

$$- \frac{\int.t^{m-3} \times \frac{m+1\times m\times m-1\times m-2}{1\times 2\times 3\times 4} \times 256}{m+1\times 4}$$

— &c.

& ainſi de ſuite.

Application des formules précédentes.

409. Lorſque dans une progreſſion arithmétique donnée on cherchera la ſomme des termes élevés chacun à une même puiſſance déterminée, il eſt viſible par la conſtruction de la formule générale, & par les équations particulieres d'où l'on a déduit cette formule, qu'il faudra prendre la formule de la progreſſion particuliere propoſée excluſivement juſqu'au terme où l'expoſant m qui eſt alors déterminé, eſt égal au nombre que l'on en retranche; c'eſt-à-dire, qu'il faudra prendre les trois premiers termes de la formule pour ſommer les premieres puiſſances des termes de la progreſſion : car en faiſant $m=1$, dans le 4e terme $\frac{\int.t^{m-1} \times \frac{m+1\times m}{1\times 2} d^2}{m+1\times d}$, on a $\frac{\int.t^{1-1} \times \frac{1+1\times 1}{1\times 2} d^2}{1+1\times d}$,

où l'on voit que le nombre retranché de l'exposant déterminé est égal à cet exposant, & par conséquent le détruit. On prendra les quatre premiers termes pour sommer les quarrés; les cinq premiers pour sommer les cubes. En général, il faudra prendre autant de termes plus deux qu'il y a d'unités dans l'exposant des puissances qu'il faudra sommer.

Substituant ensuite l'exposant déterminé à l'indéterminé m, & réduisant, on aura la valeur de la somme des puissances du degré déterminé.

EXEMPLE I.

Déterminer la somme des premieres puissances des termes d'une progression arithmétique croissante, qui commence par 1, *dont on connoît la différence* d, *& le nombre* n *des termes.*

410. Si la différence de la progression est 1, on prendra les trois premiers termes de la formule propre à cette progression (40); savoir,

$$\int.t^m = \frac{n+1}{m+1}^{m+1} - \frac{1}{m+1} - \frac{n}{m+1}.$$

Substituant l'exposant 1 des premieres puissances à l'indéterminé m, on aura $\int.t^1 = \frac{n+1}{2}^{2} - \frac{1}{2} - \frac{n}{2}$, ce qui devient en faisant le quarré de $n+1$ . .

. . . . . $\int.t^1 = \frac{n^2+2n+1-1-n}{2}$.

Et en réduisant, il vient pour la somme des termes de la progression naturelle qui commence par l'unité . . . . . $\int.t^1 = \frac{n^2+n}{2}$.

411. Si la progression a 2 pour différence, on prendra dans la formule trouvée pour cette progression les trois premiers termes (406); à savoir,

$$\int.t^m = \frac{u+2}{m+1\times 2}^{m+1} - \frac{1}{m+1\times 2} - \frac{n\times 2^{m+1}}{m+1\times 2}.$$

Subſtituant enſuite l'expoſant 1 à m, on aura

$$\ldots\ldots\ldots f.t^1 = \frac{\overline{u+2}^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{n\times 4}{4}.$$

Mettant au lieu du dernier terme u le premier terme plus la différence multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité (n°. 363); c'eſt-à-dire, $1+2\times n-1=2n-1$, il viendra . . .

$$\ldots\ldots f.t^1 = \frac{\overline{2n-1+2}^2 - 1 - n\times 4}{4},$$

ou . . . . . $f.t^1 = \frac{\overline{2n+1}^2 - 1 - n\times 4}{4}$.

Et en faiſant le quarré de $2n+1$, & en réduiſant, on aura pour la ſomme des termes de la propoſée . . . . . $f.t^1 = \frac{4n^2}{4} = n^2$.

412. Si la progreſſion a 3 pour différence, on prendra dans la formule de cette progreſſion les trois premiers termes; à ſavoir (407) . . . . . .

$$\ldots f.t^m = \frac{\overline{u+3}^{m+1}}{m+1\times 3} - \frac{1}{m+1\times 3} - \frac{n\times 3^{m+1}}{m+1\times 3}.$$

Subſtituant l'expoſant 1 à m, on aura . . .

$$\ldots\ldots f.t^1 = \frac{\overline{u+3}^2}{2\times 3} - \frac{1}{2\times 3} - \frac{n\times 9}{2\times 3},$$

ou . . . . . $f.t^1 = \frac{\overline{u+3}^2}{6} - \frac{1}{6} - \frac{9n}{6}$.

Faiſant le dernier terme $u=1+3\times\overline{n-1}=3n-2$ (n°. 363), on aura $f.t^1 = \frac{\overline{3n-2+3}^2 - 1 - 9n}{6}$,

ou . . . . . $f.t^1 = \frac{\overline{3n+1}^2 - 1 - 9n}{6}$.

Elevant $3n+1$ au quarré $f.t^1 = \frac{9n^2+6n+1-1-9n}{6}$,

Enfin réduiſant, on aura pour la ſomme des termes de la propoſée $\int.t^1 = \frac{9n^2-3n}{6} = \frac{3n^2-n}{2}$.

413. Si la progreſſion a 4 pour différence, on prendra dans la formule de cette progreſſion (408)

$$\int.t^m = \frac{\overline{u+4}^{m+1}}{m+1\times 4} - \frac{1}{m+1\times 4} - \frac{n\times 4^{m+1}}{m+1\times 4}.$$

Subſtituant l'expoſant 1 à m, on aura . . .

. . . . . $\int.t^1 = \frac{\overline{u+4}^2}{8} - \frac{1}{8} - \frac{n\times 16}{8}$.

Faiſant $u = 1+4\times n-1 = 4n-3$ (n°. 363), il viendra $\int.t^1 = \frac{\overline{4n-3+4}^2-1-16n}{8} = \frac{\overline{4n+1}^2-1-16n}{8}$

Elevant $4n+1$ au quarré $\int.t^1 = \frac{16n^2+8n+1-1-16n}{8}$

Enfin réduiſant, il viendra pour la ſomme des termes de la propoſée $\int.t^1 = \frac{16n^2-8n}{8} = 2n^2-n$,

EXEMPLE II.

Déterminer la ſomme des quarrés des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque croiſſante, qui commence par 1, dont on connoît la différence & le nombre des termes.

414. Si la progreſſion a 1 pour différence, on prendra dans la formule trouvée pour cette progreſſion les quatre premiers termes (405); à ſçavoir . . .

$$\int.t^m = \frac{\overline{n+1}^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1} - \frac{n}{m+1} - \int.t^{m-1}\times\frac{m+1\times m}{1\times 2}.$$

Subſtituant l'expoſant 2 des quarrés à l'expoſant indéterminé m, on aura $\int.t^2 = \frac{\overline{n+1}^3}{3} - \frac{1}{3} - \frac{n}{2} - \frac{\int.t^1\times 3}{3}$,

ou $f.t^2 = \frac{\overbrace{n+1}^{3} - 1 - n - 3f.t^1}{3}$.

En faiſant le cube de $n+1$, & ſubſtituant $\frac{n^2+n}{2}$ à la place de $f.t^1$ (n°. 410), on aura l'équation ſuivante $f.t^2 = \frac{n^3+3n^2+3n+1-1-n-\frac{3n^2+3n}{2}}{3}$, laquelle étant réduite, donnera $f.t^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ pour la valeur de la ſomme des quarrés des termes de la progreſſion des nombres naturels, qui commence par 1.

On pourra déterminer de la même maniere la ſomme des quarrés des termes de la progreſſion, lorſque la différence ſera 2, ou 3, ou 4, &c. en employant les formules propres à ces progreſſions.

On pourra de même déterminer la ſomme des cubes, celle des quatriemes, celle des cinquiemes, &c. puiſſances des termes des mêmes progreſſions, en prenant toujours dans les formules particulieres autant de termes plus deux qu'il y aura d'unités dans l'expoſant des puiſſances qu'il faudra ſommer.

On pourra, en employant la formule générale (n°. 404), déterminer dans toutes ſortes de progreſſions arithmétiques croiſſantes finies la ſomme des puiſſances d'un même degré quelconque des termes, quels que ſoient le premier terme & la différence, pourvu que l'on connoiſſe toujours le premier terme, la différence & le nombre des termes.

ARTICLE II.

Des nombres poligones & pyramidaux.

Maniere de compter les pyramides de boulets.

DÉFINITIONS.

415. On appelle nombres *poligones*, les nombres qui naiſſent de l'addition des termes conſécutifs d'une progreſſion arithmétique qui commence par 1 ; c'eſt-à-dire, le premier terme de cette progreſſion, la ſomme des deux premiers, celle des trois premiers, & ainſi de ſuite.

On diſtingue différentes ſortes de nombres poligones ; à ſavoir, les *triangulaires*, les *quarrés*, les *pentagones*, les *exagones*, les *eptagones*, les *octogones*, &c.

Si la différence de la progreſſion eſt 1, comme . . . . . ÷ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . &c. le premier terme, la ſomme des deux premiers, celle des trois premiers, celle des quatre premiers, &c. formeront la ſuite 1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 . &c. qu'on appelle la ſuite des nombres *triangulaires*.

Si la différence eſt 2, ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . &c. le premier terme, la ſomme des deux premiers, celle des trois premiers, celle des quatre premiers, &c. formeront la ſuite 1 . 4 . 9 . 16 . 25 . 36 . &c. qu'on appelle la ſuite des *quarrés*.

Si la différence eſt 3, ÷ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . &c. le premier terme, la ſomme des deux premiers, celle des trois premiers, &c. formeront la ſuite . . . . . 1 . 5 . 12 . 22 . 35 . 51 . &c. que l'on appelle la ſuite des *pentagones*.

Si la différence eſt 4, ÷ 1 . 5 . 9 . 13 . 17 . 21 . &c. le premier terme, la ſomme des deux premiers, celle des trois premiers, celle des quatre premiers, &c.

formeront la ſuite . 1 . 6 . 15 . 28 . 45 . 66 . &c. qu'on appelle la ſuite des *exagones*.

Les eptagones naiſſent de l'addition des termes conſécutifs d'une progreſſion, qui commence par 1, & qui a 5 pour différence. Les octogones naiſſent de l'addition des termes conſécutifs d'une progreſſion, qui commence par 1, & qui a 6 pour différence. Ainſi de ſuite.

Les nombres poligones ſont ainſi appellés parce que les unités dont ils ſont compoſés peuvent être rangées en figures géométriques régulieres ; à ſavoir, les unités des nombres triangulaires en triangles, celles des nombres quarrés en quarrés, &c. (*Fig.* 21.)

Dans les nombres poligones on conſidere le côté & le nombre des angles.

416. On nomme *côté* d'un nombre poligone, le nombre des termes de la progreſſion arithmétique dont le nombre poligone eſt la ſomme, ou le nombre qui marque le rang d'un nombre poligone dans la ſuite des nombres poligones de ſon eſpece.

Par exemple, parmi les nombres quarrés *celui* qui eſt la ſomme des deux premiers termes de la progreſſion arithmétique . . . 1 . 3 . 5 . 7 . &c. ou celui qui eſt le ſecond dans la ſuite des nombres quarrés . . . . 1 . 4 . 9 . 16 . &c. a le nombre 2 pour côté ; le troiſieme nombre quarré ou celui qui eſt la ſomme des trois premiers termes de la progreſſion, a le nombre 3 pour côté, & ainſi de ſuite.

417. Le *nombre des angles*, c'eſt le nombre qui marque combien d'angles a la figure d'où le nombre poligone a pris ſon nom.

Le nombre des angles déſigne donc l'eſpece d'un nombre poligone ; ce nombre, dans les triangulaires, eſt 3 ; dans les quarrés, il eſt 4 ; dans les pentagones, 5 ; dans les exagones, 6, &c.

418.

418. D'où il ſuit que le nombre des angles ſurpaſſe toujours de deux unités la différence de la progreſſion, qui a ſervi à former la ſuite des nombres poligones de l'eſpece déſignée par le nombre des angles.

Ainſi le nombre des angles étant donné, ſi on en retranche deux unités, le reſte ſera la différence de la progreſſion.

419. De l'addition des termes conſécutifs d'une ſuite de nombres poligones d'une même eſpece quelconque, naiſſent d'autres eſpeces de nombres qu'on appelle nombres *pyramidaux premiers*.

420. De l'addition des termes conſécutifs d'une ſuite de nombres pyramidaux premiers d'une même eſpece quelconque, naiſſent d'autres nombres qu'on nomme *pyramidaux ſeconds*.

Et ainſi de ſuite.

PROBLÊME I.

422. *Le nombre des angles, & le côté d'un nombre poligone étant donné, trouver le nombre poligone.*

SOLUTION.

Puiſqu'un nombre poligone eſt la ſomme des termes (n°. 415) d'une progreſſion arithmétique croiſſante qui commence par 1, que le côté du nombre poligone n'eſt autre choſe que le nombre des termes de cette progreſſion (n°. 416), & que le nombre des angles diminué de deux unités, eſt égal à la différence (n°. 418), il eſt évident que le problême ſe réduit à trouver la ſomme des termes d'une progreſſion arithmétique dont on connoît le nombre des termes, qui eſt le côté du nombre poligone, & que l'on exprimera par n, la différence qui eſt le nombre des angles diminué de deux unités, & que l'on exprimera par d, le premier terme 1, & dont le dernier terme eſt égal à (n°. 363) $1 + dn - d$.

Or (formule générale) la somme des termes d'une progression arithmétique croissante est (en substituant l'exposant 1 des premières puissances à la place de l'indéterminée m) $\frac{n^2 \times d + n \times 2 - d}{2}$.

Donc en mettant 1 à la place de a^2 quarré du premier terme de la progression indéterminée $a.b.c.u$, & $1 + dn - d$ à la place du dernier terme u, on aura

$$\frac{n^2 \times d + n \times 2 - d}{2}$$

ce qui se réduit à

$$\frac{n^2 d + 2n - nd}{2}$$

Ainsi la valeur indéterminée d'un nombre polygone quelconque, dont le côté sera exprimé par n, dont le nombre des angles diminué de deux unités est exprimé par d, sera exprimée par $\frac{n^2 \times d + n \times 2 - d}{2}$.

Application de la formule $\frac{n^2 \times d + n \times 2 - d}{2}$

Si le nombre des angles $\left\{\begin{matrix} = 3 \\ = 4 \\ = 5 \\ = 6 \\ \text{\&c.} \end{matrix}\right.$ on aura (n°. 418) $d \left\{\begin{matrix} = 1 \\ = 2 \\ = 3 \\ = 4 \\ \text{\&c.} \end{matrix}\right.$

Et en substituant cette valeur de d dans la formule,

le nombre

- triangulaire sera $\frac{n^2 + n}{2}$ comme (n°. 410).
- quarré sera $\frac{2n^2}{2} = n^2$ comme (n°. 411).
- pentagone sera $\frac{3n^2 - n}{2}$ comme (n°. 412).
- exagone sera $2n^2 - n$ comme (n°. 413).
- &c. &c.

REMARQUE.

423. Lorsque l'on connoîtra un nombre poligone avec l'espece du poligone, c'est-à-dire, avec le nombre des angles, on pourra, à l'aide de la formule $\frac{n^2 \times d + n \times 2 - d}{2}$, déterminer le côté de ce nombre poligone.

Car nommant a le nombre poligone, mettant dans la formule x à la place du côté n cherché, d exprimant toujours le nombre connu des angles diminué de deux unités, on aura l'équation $a = \frac{x^2 \times d + x \times 2 - d}{2}$, dont la résolution fera connoître le côté x.

Et lorsque l'on connoîtra le nombre poligone a avec son côté n, on pourra encore déterminer le nombre des angles ou l'espece du poligone, à l'aide de la même formule $\frac{n^2 \times d + n \times 2 - d}{2}$.

Car si à la place de d qui est le nombre des angles diminué de deux unités, on met x, on aura l'équation $a = \frac{n^2 \times x + n \times 2 - x}{2}$, dont la résolution fera connoître x ou le nombre des angles diminué de deux unités; par conséquent si on ajoute 2 à la racine de cette équation, on aura le nombre des angles.

PROBLÊME II.

424. *Trouver la somme d'une suite de nombres poligones d'une même espece quelconque, & qui commence par l'unité, étant donné le côté du plus grand nombre poligone de cette suite, avec le nombre des angles.*

SOLUTION.

Chacun des nombres poligones d'une même suite,

est représenté par la formule (n°. 422)

dans laquelle n représente le côté de chacun des nombres poligones de la même suite, & ces côtés suivent la loi des nombres naturels (n°. 416) 1. 2. 3. 4. 5. &c.

n^2, dans cette formule, représente les quarrés de ces différens côtés, & par conséquent les quarrés des nombres naturels.

d représente le nombre des angles droits de l'infinité, & est par conséquent une grandeur constante.

Ainsi la somme des nombres poligones d'une même suite sera représentée par la formule

dans laquelle $s.n^2$ représente la somme des quarrés des nombres naturels inclusivement depuis 1 jusqu'au côté du plus grand nombre poligone de la suite proposée, & $s.n^1$ représente la somme de ces mêmes nombres.

Or la valeur de la somme des quarrés de ces nombres naturels est exprimée par la formule $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ (414), dans laquelle n représente le plus grand de ces nombres naturels, ou le côté du plus grand nombre poligone.

Et la valeur de la somme de ces mêmes nombres naturels est exprimée par la formule $\frac{n^2+n}{2}$ (410), dans laquelle n représente encore le côté du plus grand nombre poligone.

Donc en substituant la valeur de $s.n^2$ & de $s.n^1$ dans $\frac{s.n^2 \times d + s.n \times 2 - d}{2}$, on aura pour la valeur de la somme des nombres poligones d'une même suite

quelconque, la quantité $\frac{2n^3+3n^2+n\times d}{6}$ + $\frac{n^2+n\times 2-d}{2}$

ce qui se réduit à $\frac{2n^3+3n^2+n\times d+3n^2\times 2-3n\times d}{6}$

dans laquelle n représente le côté de chacun des nombres polygones de la même suite, & ces suites suivent la loi des nombres naturels (n°. 416) 1. 2. 3. 4. 5. &c.

Ainsi, pour avoir la somme des angles de la suite des nombres polygones, il faut substituer dans la formule $\frac{2n^3+3n^2+n\times d}{6}$, à la place de d, le nombre des angles de chaque polygone, & par conséquent les quatres différens cas, & par conséquent les quatres différens nombres naturels.

dans laquelle n représente le côté du plus grand nombre polygone de la suite proposée, n^2 le quarré de ce côté, n^3 le cube.

425. *Application de la formule.* Dans la suite des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. &c. qui commence par l'unité, on aura pour la suite des nombres triangulaires $d=3$, pour celle des quarrés $d=4$, pour celle des pentagones $d=5$, pour celle des exagones $d=6$, pour celle des epragones $d=7$, on aura (n°. 418) $d-2=1$, $d-2=2$, $d-2=3$, $d-2=4$, $d-2=5$,

& en substituant cette valeur de d dans la formule ci-dessus

Et l'on aura pour la somme des nombres

triangulaires $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$

quarrés $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

pentagones $\frac{n^3+n^2}{2}$

exagones n^2

epragones $\frac{4n^3-3n^2+n}{6}$,

de la même suite de nombres polygones d'une même suite

426. Regles pour déterminer le nombre des boulets de la pyramide triangulaire, & de la pyramide quarrée.

1°. Pour la pyramide triangulaire. La pyramide triangulaire de boulets eſt compoſée de nombres triangulaires *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* de boulets égaux, poſés les uns ſur les autres. (*Fig.*)

Ces nombres triangulaires de boulets en allant du ſommet de la pyramide à la baſe, ſont égaux aux termes correſpondans de la ſuite des nombres triangulaires (n°. 415) 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c.

Le côté de la baſe de la pyramide eſt le côté du plus grand des nombres triangulaires de boulets dont la pyramide eſt compoſée.

Le nombre des boulets d'une pyramide triangulaire eſt donc la ſomme d'une ſuite de nombres triangulaires qui commence par l'unité, & dont le plus grand a pour côté le côté de la baſe de la pyramide; ainſi en déſignant ce côté par n, le nombre des boulets de la pyramide ſera exprimé par la formule (n°. 425) $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$, de laquelle on déduit cette regle.

Pour trouver le nombre des boulets d'une pyramide triangulaire, on fera { le cube du côté de la baſe, / trois fois le quarré de ce même côté, / le double de ce côté; } on ajoutera enſemble ces trois quantités, & on diviſera la ſomme par 6, le quotient ſera le nombre des boulets de la pyramide triangulaire.

EXEMPLE.

Si le côté de la pyramide triangulaire eſt 9, on

fera { 729 le cube du côté 9,
243 trois fois le quarré de 9.
18 deux fois le côté 9.

On divisera par 6 la somme 990.

Et le quotient 165 sera le nombre des boulets de la pyramide triangulaire.

2°. Pour la pyramide quarrée. La pyramide quarrée de boulets est composée de nombres quarrés A, B, C, D, E, etc. de boulets égaux posés les uns sur les autres (Fig. 2).

Ces nombres quarrés de boulets, en allant du sommet à la base, sont égaux aux termes correspondans de la suite des quarrés 1, 4, 9, 16, 25, etc.

Le côté de la base de la pyramide est le côté du plus grand des nombres quarrés de boulets dont la pyramide est composée.

Le nombre des boulets d'une pyramide quarrée est donc la somme d'une suite de nombres quarrés, qui commence par l'unité, & dont le plus grand a pour côté le côté de la base de la pyramide; ainsi en désignant ce côté par n, le nombre des boulets de cette pyramide sera exprimé par la formule (n°. 414) $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$.

D'où l'on déduit cette regle pour trouver le nombre des boulets d'une pyramide quarrée, on prendra { deux fois le cube du côté de la base,
trois fois le quarré de ce même côté,
une fois ce côté.

On fera la somme de ces trois quantités, & on la divisera par 6, le quotient sera le nombre cherché des boulets.

Si le côté de la pyramide est 9, on prendra
$\frac{d \times n^3 - n + 3n^2 + n}{6}$ côté 9
on trouvera par la formule 1715.

Et le quotient 285 sera le nombre de boules de la pyramide quarrée proposée.

17°. Lorsque l'on aura la somme d'une suite de nombres polygones d'une même suite quelconque, qui commence par l'unité, avec l'espece de ces polygones ; c'est-à-dire, le nombre des angles, on pourra déterminer le côté du plus grand nombre polygone de la suite proposée, à l'aide de la formule (n°. 1714)

$$\frac{d \times n^3 - n + 3n^2 + n}{6}$$

Car faisant la somme connue des nombres polygones $= a$, mettant x à la place du côté cherché n du plus grand nombre polygone, le nombre des angles diminué de deux unités étant toujours exprimé par d, on aura l'équation $a = \frac{d \times x^3 - x + 3x^2 + 3x}{6}$,

dont la résolution fera connoître la valeur du côté cherché x du plus grand nombre polygone.

[illegible] qu'à l'aide de la formule [illegible] terminée plus de trois qu'on ne peut [illegible] trouvant la valeur indéterminée d'un nombre polygone quelconque on est parvenu à la valeur indéterminée de la somme d'une suite de

nombres poligones d'une même eſpece quelconque, en mettant dans cette formule la valeur de la ſomme des n^2 & celle des n à la place de n^2 & de n. Ce qui donne pour la valeur indéterminée d'un nombre pyramidal premier quelconque $\frac{d \times n^3 - n + 3n^2 + 3n}{6}$.

429. On pourra auſſi, à l'aide de cette derniere formule, former les nombres pyramidaux ſeconds, en mettant dans cette formule à la place de n, qui eſt le terme du plus grand des nombres poligones, dont chaque nombre pyramidal premier eſt compoſé, la valeur de la ſomme des n; à la place de n^2 la valeur de la ſomme des n^2, & à la place de n^3 la valeur de la ſomme des n^3.

Et à l'aide de la formule touchant la valeur indéterminée d'un nombre pyramidal quelconque du ſecond ordre, on pourra arriver à la formule touchant la valeur indéterminée d'un pyramidal quelconque du troiſieme ordre.

Et ainſi de ſuite.

ARTICLE III.

De la grandeur conſidérée comme infinie.

Regles pour ſommer les puiſſances d'un même degré quelconque des termes de la progreſſion des nombres naturels, pouſſée à l'infini.

DÉFINITIONS.

430. Une grandeur eſt dite *infinie* lorſqu'elle renferme une autre grandeur quelconque, finie & déterminée plus de fois qu'on ne peut l'exprimer par aucun nombre fini, quelque grand qu'il puiſſe être.

Une grandeur eſt dite *infiniment petite* lorſqu'elle eſt renfermée dans une grandeur finie plus de

fois qu'on ne peut l'exprimer par aucun nombre fini quelque grand qu'il puiſſe être.

432. Une grandeur a eſt dite infiniment petite à l'égard d'une autre grandeur b, lorſqu'elle eſt renfermée dans cette grandeur b plus de fois qu'on ne peut l'exprimer par aucun nombre fini quelque grand qu'il puiſſe être.

Les Géometres déſignent l'infini par ∞, & l'infiniment petit par $\frac{1}{\infty}$.

Des définitions que l'on vient de donner, on déduira les propriétés ſuivantes.

433. *Premiere.* Toute grandeur a finie eſt infiniment petite à l'égard d'une grandeur x infiniment grande.

Car toute grandeur finie eſt renfermée dans une grandeur infiniment grande plus de fois qu'on ne peut l'exprimer par aucun nombre fini quelque grand qu'il puiſſe être (n°. 430). Donc toute grandeur finie a eſt infiniment petite à l'égard d'une grandeur x infinie (n°. 432).

434. *Seconde.* Le produit fait de la multiplication d'une grandeur finie a par une grandeur infiniment petite $\frac{1}{\infty}$, c'eſt-à-dire, $\frac{a \times 1}{\infty} = \frac{a}{\infty}$ eſt infiniment petit.

Car après avoir fait le produit $\frac{a \times 1}{\infty}$, qu'on multiplie enſuite $\frac{1}{\infty}$ par l'infini ∞, ce qui donnera $\infty \times \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1$, les deux produits $\frac{a}{\infty}$ & 1, à cauſe du produiſant commun $\frac{1}{\infty}$, ſeront entr'eux comme les produiſans inégaux a & ∞, mais la grandeur finie a eſt contenu une infinité de fois dans l'infini ∞ (n°. 430). Donc le produit $\frac{a}{\infty}$ eſt auſſi contenu une infi-

dire de fois dans le produit 1 ; qui eſt une grandeur finie : donc $\frac{a}{\infty}$ ou $\frac{a \times 1}{\infty}$ eſt un infiniment petit (n°. 434).

435. *Troiſieme.* Une puiſſance quelconque x^{m-1} d'une grandeur x infinie eſt infiniment petite à l'égard d'une autre puiſſance x^m de la même grandeur, dont l'expoſant a une unité de plus.

Car $\frac{x^m}{x^{m-1}} = x$ (n°. 183), x^{m-1} eſt donc contenu dans x^m autant de fois qu'il eſt exprimé par l'infinie x, c'eſt-à-dire, une infinité de fois ; donc x^{m-1} eſt infiniment petit à l'égard de x^m (n°. 431).

En particulier l'infinie x ſera infiniment petite à l'égard de ſon quarré x^2. x^2 ſera infiniment petit à l'égard de x^3. Et ainſi de ſuite.

436. *Propoſition.* Une grandeur a infiniment petite à l'égard d'une autre grandeur b, peut être regardée comme zero à l'égard de cette grandeur b.

C'eſt-à-dire, que lorſque a ſera joint à b par le ſigne + ou par le ſigne −, on la négligera dans le calcul, en faiſant $b \pm a = b \pm 0 = b$.

Car la grandeur a étant infiniment petite à l'égard de b, elle eſt contenue dans cette grandeur b une infinité de fois, cette grandeur a eſt donc à l'égard de b une partie moindre que la plus petite que l'on puiſſe imaginer & exprimer, & par conſéquent elle ne peut être regardée que comme zero à l'égard de b.

COROLLAIRES.

437. *Premier.* Toute grandeur finie a, jointe par le ſigne + ou − à une grandeur x infinie, peut être négligée dans le calcul (n°. 432).

438. *Second.* Le produit fait de la multiplication d'une grandeur finie par une grandeur infiniment petite, peut être négligé dans le calcul (n°. 434).

439. *Troiſième.* La puiſſance x^{m-1} de l'infinie x, jointe par le ſigne + ou — à la puiſſance x^m, dont le degré a une unité de plus, peut être négligée dans le calcul (435).

A plus forte raiſon on pourra négliger les puiſſances x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4}, &c. de l'infinie x, lorſqu'elles ſeront jointes à x^m par le ſigne + ou —.

440. *Quatrième.* Lorſqu'à la puiſſance x^m de l'infinie x, ſeront jointes par les ſignes + ou — les puiſſances inférieures x^{m-1}, x^{m-2}, &c. multipliées par des grandeurs finies, on pourra les négliger dans le calcul (434).

PROBLÈME.

441. *Déterminer la ſomme des puiſſances d'un même degré quelconque des termes de la progreſſion des nombres naturels* 1. 2. 3. 4. 5. *&c. pouſſée à l'infini.*

SOLUTION.

La ſomme des puiſſances d'un même degré quelconque m des termes de la progreſſion des nombres naturels, qui commence à l'unité, & qui eſt pouſſée juſqu'au terme u auſſi éloigné que l'on voudra, eſt repréſentée par la formule (n°. 405) $f.t^m = \frac{u+1}{m+1}$

$$\frac{1}{m+1} \cdot \frac{n}{m-1} + f.t^{m-2} \times \frac{m+1 \times m}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ &c.}$$

$m+1$

Mais en ſuppoſant la ſuite naturelle 1. 2. 3. 4. 5. &c. pouſſée à l'infini, tous les termes qui ſont renfermés du premier $\frac{u+1}{m+1}$ dans la formule étant des grandeurs finies ou des puiſſances d'un exposant moindre que m, multipliées par des quantités finies, ſeront infiniment petits à l'égard de ce premier terme (n°. 435), & pourront par conſéquent être négli-

gés dans le calcul (n° 436), & la formule deviendra . . . . . $\int.t^m = \frac{u^{m+1}}{m+1}$

Le dernier terme u étant infini, on aura (n° 436) $u+1=u$, & par conſéquent . . . $\int.t^m = \frac{u^{m+1}}{m+1}$

ou . . . . . $\int.t^m = \frac{u^m \times u}{m+1}$

Et parce que le dernier terme u de la progreſſion des nombres naturels eſt égal au nombre des termes déſigné par n, on aura enfin . . . $\int.t^m = \frac{u^m \times n}{m+1}$

On déduira de cette formule la regle générale qui ſuit.

442. *Propoſition.* La ſomme des puiſſances d'un même expoſant quelconque fini m des termes de la progreſſion des nombres naturels, qui commence par l'unité, & qui eſt pouſſée à l'infini, eſt égale au produit de la puiſſance m de ſon dernier terme multiplié par le nombre des termes diviſé par l'expoſant m augmenté de l'unité.

Formules particulieres déduites de la formule générale

$$\int.t^m = \frac{u^m \times n}{m+1}.$$

443. 1°. Pour les puiſſances des nombres naturels dont l'expoſant eſt un nombre entier, en faiſant

$m=1$, $m=2$, $m=3$, $m=4$, $m=5$, on aura pour la ſomme

- termes ou 1res puiſſances $\int.t^1 = \frac{u^1 \times n}{2}$
- quarrés ou 2es puiſſances $\int.t^2 = \frac{u^2 \times n}{3}$
- cubes ou 3es puiſſances $\int.t^3 = \frac{u^3 \times n}{4}$
- quarrieres puiſſances $\int.t^4 = \frac{u^4 \times n}{5}$
- cinquiemes puiſſances $\int.t^5 = \frac{u^5 \times n}{6}$

444. 2°. Pour les puiſſances des nombres naturels dont l'expoſant eſt une fraction, en faiſant

$n = \frac{1}{2}$ on aura pour la ſomme des racines quarrées ou 2^{es} $\int t^{\frac{1}{2}} = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$

$n = \frac{1}{3}$ pour la ſomme des racines cubiques ou 3^{es} $\int t^{\frac{1}{3}} = \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}$

$n = \frac{1}{4}$ pour la ſomme des racines quatriemes . . $\int t^{\frac{1}{4}} = \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}$

$n = \frac{1}{5}$ pour la ſomme des racines cinquiemes . . $\int t^{\frac{1}{5}} = \frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}$

$n = \frac{1}{6}$ pour la ſomme des racines ſixiemes . . $\int t^{\frac{1}{6}} = \frac{t^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}$

445. Si $n = \frac{2}{1}$ on aura $\int t^{\frac{2}{1}} = \frac{t^{\frac{3}{1}}}{\frac{3}{1}}$

$n = \frac{3}{1}$ on aura $\int t^{\frac{3}{1}} = \frac{t^{\frac{4}{1}}}{\frac{4}{1}}$

&c. &c.

Fin du Tome premier.

ERRATA de ce Volume.

Page 44, *ligne* 15, à multiplier par 4 & 5, *liſez* à multiplier ſucceſſivement par 4 & 3.

P. 71, *lig.* 12, Lorſque le dividende, *liſ.* 66. Lorſque le dividende.

P. 79, *lig.* 5, le terme, *liſ.* ce terme.

P. 87, *lig.* 22, dont, *liſ.* dont.

P. 88, *lig.* 30, avec des expoſans différens, *ſupprimez ces mots.*

P. 105, *lig.* 8, en quantités connues, *liſ.* en parties de moindre valeur & de la même eſpece que l'unité principale.

P. 106, *lig.* 6, $+ \frac{m}{a+a}$ *liſ.* $+ \frac{m}{a+b}$.

P. 107, *lig.* 1, lorſque l'on propoſe, *liſ.* ſi l'on propoſe. $+$

P. 108, *lig.* 18, $c - 2f$, *liſ.* $c - 2f$. $+$

P. 113, *lig.* 5, chaque dénominateur, *liſ.* chaque numérateur.

P. 115, *lig.* 27, $\frac{11}{60} = 1 + \frac{51}{60}$, *liſ.* $\frac{11}{10} = 1 + \frac{51}{10}$.

P. 119, *lig.* 27, les fractions de fractions, *liſ.* la fraction de fraction.

P. 145, *lig.* 24, 5 : 1, 9 den. $+\frac{1}{3}$, *lif.* 15 : 9 den. $+\frac{1}{3}$.

P. 153, *lig.* 13, de la multiplication d'une quantité par elle-même, *lif.* la multiplication d'une quantité une fois par elle-même.

P. 215, *lig.* 11, en la réduiſant, *lif.* en réduiſant.

P. 232, *lig.* 4, on produiſe, *lif.* produiſe.

P. 233, *lig.* 19, pour rendre l'expoſant, *lif.* pour rendre l'expreſſion.

P. 236, *lig.* 16, la grandeur propoſée $\sqrt{a^2x}$, *lif.* la grandeur propoſée $\sqrt[n]{a^nx}$.

P. 267, *lig.* 24, à cauſe du ſigne qui affecte, *lif.* à cauſe du ſigne ou quantité.

P. 274, *lig.* 23, *par le diviſeur*, lif. *par ce diviſeur.*

P. 285, *lig.* 17, où ſe trouveront les deux inconnues, *lif.* où ſe trouveront ces deux inconnues.

P. 286, *lig.* 24, pour réduire en équation, *lif.* pour réduire des équations.

P. 289, *lig.* 5 & 6, à la place de $-y$ & de $-x$, leurs valeurs, *lif.* les valeurs retranchées de y & de x.

P. 303, *lig.* 11, ſon dixieme par $\frac{x}{10}$, *lif.* par $\frac{x}{10}$.

P. 306, *lig.* 22, en général ; le poids, *lif.* en général le poids.

P. 313, *lig.* 8, ſa valeur retranchée, *lif.* la valeur retranchée de y.

P. 314, *lig.* 16, la quantité y qu'il faudra prendre, *lif.* le nombre y qu'il faudra prendre.

P. 315, *lig.* 10 & 11, déterminées, *lif.* déterminés.

P. 340, *lig.* 18, les racines, *lif.* ces racines.

P. 346, *lig.* 7, par les ſignes $+$ & $-$, *ajoutez* qui précedent le ſigne radical.

P. 352, *lig.* 25 & 26, a le grand nombre de diviſeurs, *lif.* a pour diviſeurs.

P. 353, *lig.* 10, $y \times 2$ ſecond terme de la ſuite des diviſeurs à, *lif.* y multiplié par le ſecond terme 2 de la ſuite des diviſeurs.

P. 356, *lig.* 7, $+px = +p^2y + \frac{pn}{3}$, *liſez* $px = py + \frac{pn}{3}$.

P. 359, *lig.* 9, $+x = 5 - y \times 1 + 5 - y$, *liſez* $x = 5 - y \times 1 = +5 - y$.

P. 359, *lig.* 13, $+x = -q$, *liſez* $x = -q$.

P. 362, *lig.* 6, ne ſe détruiſent point, *lif.* ne ſe détruiront point.

P. 367, *lig. avant-derniere*, puiſſances exactes ; & pour trouver leurs racines, *liſ.* puiſſances exactes, & pour trouver leurs racines.

P. 371, *lig.* 7, $x^3 + 3abx + a^3b^3 = 0$, liſez $x^3 + 3abx + a^3 - b^3 = 0$.

P. 372, *lig.* 7, & l'on trouvera pour la valeur, *liſ.* & l'on trouvera pour ſa valeur.

P. 379, *lig.* 13, dans la premiere & ſeconde ſuite, *liſ.* dans la premiere & dans la ſeconde ſuite.

P. 402, *lig.* 13, or en regardant, *liſ.* ou en regardant.

P. 404, *lig.* 2, des effets compris, *liſ.* des effets compoſés.

P. 415, *lig.* 13, pour la progreſſion décroiſſante, *liſ.* pour la progreſſion croiſſante.

P. 418, *lig.* 28, progreſſion croiſſante. *liſ.* progreſſion décroiſſante.

P. 424, *lig.* 22, les proportions, *liſ.* ces proportions.

P. 445, *lig.* 8, $a \times x^{n+1} = b$, liſ. $a \times x^{n-1} = b$.

P. 456, *lig.* 23, 1°. $y + z = \sqrt{p + \sqrt{q}}$, liſez $y + z = \sqrt{p + \sqrt{q}}$.

P. 458, *lig.* 13, $2 + \frac{1}{2}r^2$, liſez $2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

P. 461, *lig. derniere*, l'équation $4y^3 * - 3y\sqrt[3]{p^2 - q} - p = 0$, *ajoutez* contiendra des radicaux, & l'on ne pourra, &c.

P. 463, *lig.* 12, $4y^3 * + 3y \pm 18 = 0$, *liſ.* $4y^3 * + 3y \mp 18 = 0$, *& le reſte en conſéquence.*

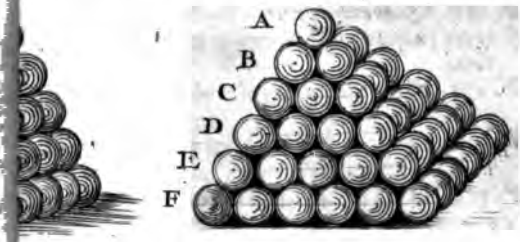
P. 466, *lig. derniere*, & que ce ſoit le dernier terme, *liſ.* que u ſoit le dernier terme.

P. 467, *lig.* 2, on aura évidemment, *liſ.* & l'on aura évidemment.

P. 469, *lig.* 1, $-\frac{d^5}{5d}$, liſ. $-\frac{5d^5}{5d}$.

P. 471, *lig.* 22, $$-\frac{\int . t^{m-1} \times \frac{m+1 \times m}{1 \times 2} d^2}{\frac{}{m-1 \times d}}$$

liſez $$-\frac{\int . t^{m-1} \times \frac{m+1 \times m}{1 \times 2} d^2}{\frac{}{m+1 \times d}}$$



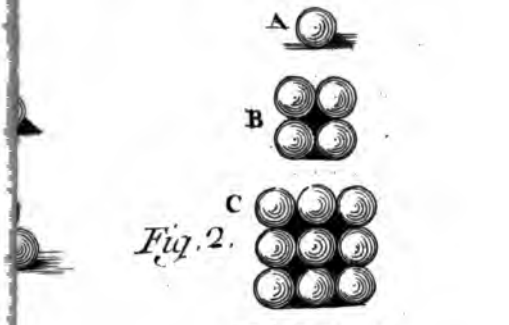
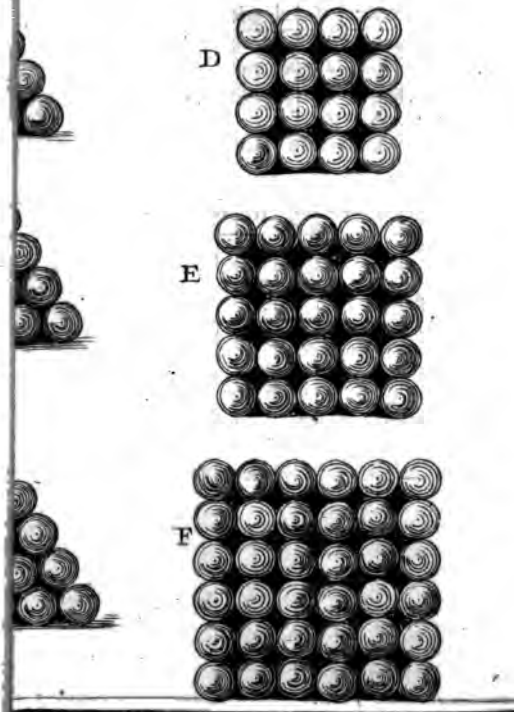
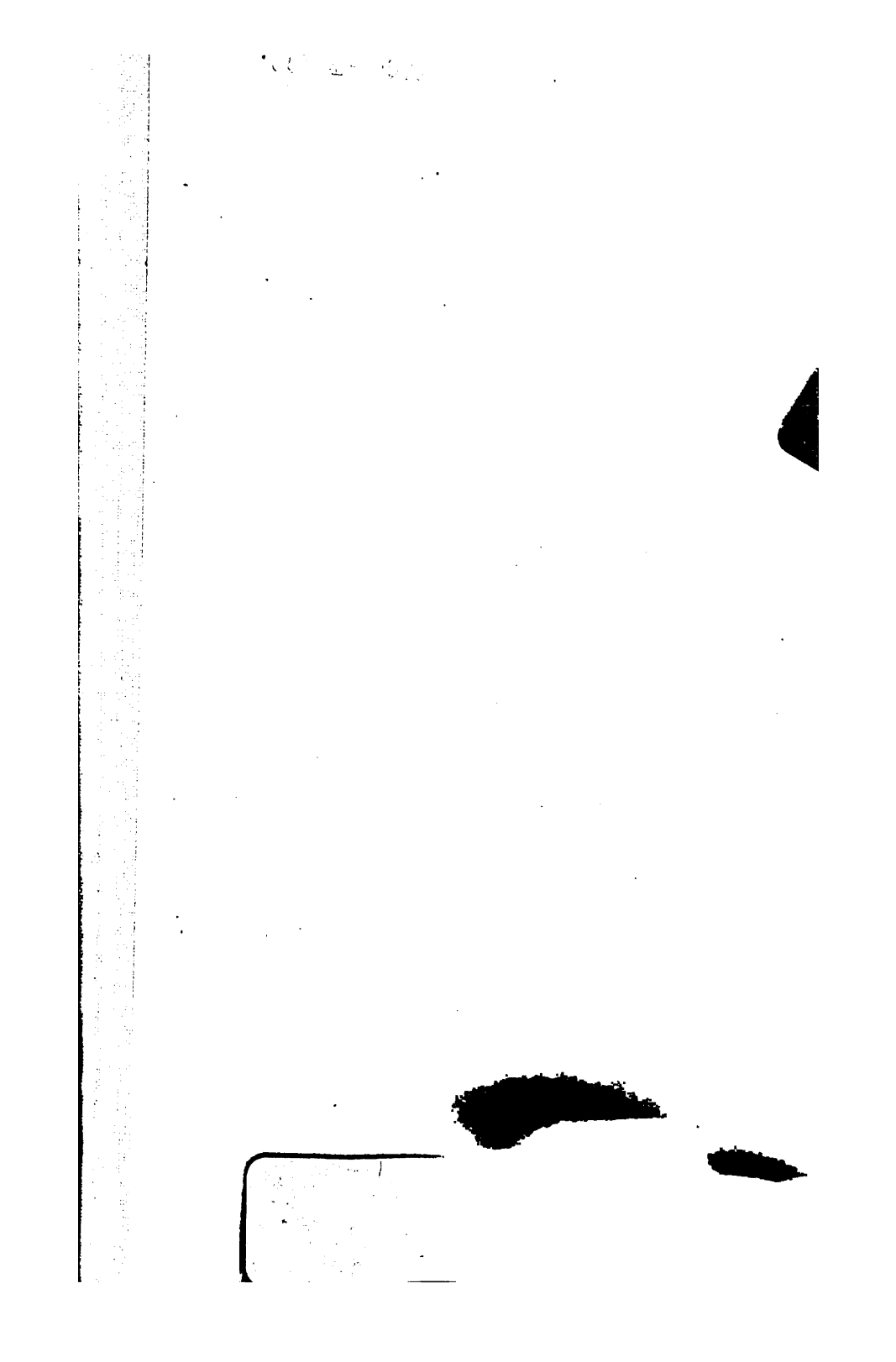



Fig. 2.